



AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

DZIEDZINA NAUK INŻYNIERYJNO-TECHNICZNYCH

AUTOMATYKA, ELEKTRONIKA, ELEKTROTECHNIKA I TECHNOLOGIE KOSMICZNE

AUTOREFERAT ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Zastosowanie rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu w modelowaniu cyfrowym procesów przewodnictwa cieplnego.

Autor: mgr inż. Edyta Gawin

Promotor rozprawy: prof. dr hab. inż. Krzysztof Oprzędkiewicz

Praca wykonana: Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki
i Inżynierii Biomedycznej,
Katedra Automatyki i Robotyki

Kraków, 2023

Streszczenie

Praca zawiera opracowanie, analizę teoretyczną, identyfikację oraz weryfikację doświadczalną dla nowych, zaproponowanych przez autorkę modeli niecałkowitego rzędu dla procesów przewodnictwa cieplnego. Porównano cztery modele ciągle zdefiniowane w przestrzeni stanu: pierwszy klasyczny, rzędu całkowitego oraz trzy nowe modele niecałkowitego rzędu. Wyniki przeprowadzonych eksperymentów wskazały, iż najlepszym modelem pod względem minimalizacji funkcji kosztu MSE, jest model o niecałkowitym rzędzie zarówno wzdłuż długości, jak i czasu. Następnie przedstawiono nową, efektywną obliczeniowo dyskretną metodę rozwiązywania równań niecałkowitego rzędu, bazującą na aproksymacji CFE. Zaproponowano również dyskretne modele w przestrzeni stanu wykorzystujące aproksymacje dyskretne FOBD oraz CFE. Opracowano i zweryfikowano doświadczalnie nowe modele transmitancyjne niecałkowitego rzędu w postaci hybrydowych transmitancji ciągłych i dyskretnych.

W ostatniej części pracy dokonano implementacji na sterowniku PLC podstawowego elementu ułamkowego rzędu z użyciem dyskretnych aproksymacji FOBD i CFE. Badania testowe dyskretnych implementacji PLC podstawowego operatora ułamkowego wykazały, że może on być zaimplementowany na platformie PLC ze spełnieniem wymagań dotyczących zarówno dokładności, jak i wymagań czasu rzeczywistego.

Motywacja

Teoria równań różniczkowych niecałkowitego rzędu została wprowadzona przez matematyków XVII wieku (Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Guillaume de l'Hospital (1661-1704), Isaac Newton (1643-1727), Leonhard Euler (1707-1783) czy Pierre Simon de Laplace (1749-1827), ale jej zastosowanie było ówczesnie nieznanie. Od tego czasu rachunek różniczkowy rzędu ułamkowego był przedmiotem rozważań teoretycznych wielu pokoleń matematyków.

Dalsza ewolucja teorii i zastosowań nastąpiła dopiero w XIX i XX wieku. Joseph Liouville, Georg Wilhelm Grünwald, Ilia Letnikov, Bernhard Riemann oraz Michele Caputo pod koniec XIX wieku stworzyli podstawy rachunku różniczkowego ułamkowego (niecałkowitego) rzędu.

W XX wieku zauważono, iż wiele zjawisk fizycznych można lepiej opisać używając rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu. Dodatkowo bardzo szybki rozwój technik komputerowych spowodował, że pojawiło się coraz więcej praktycznych zastosowań. Rachunek różniczkowy rzędu ułamkowego może być traktowany jako uogólnienie pojęć całki i różniczki w klasycznym rachunku całkowym i różniczkowym.

Modelowanie procesów i zjawisk trudnych do opisanego za pomocą innych struktur matematycznych jest jednym z głównych obszarów zastosowań rachunku niecałkowitego rzędu. Obecnie znane są szerokie zastosowania rachunku niecałkowitego rzędu, m.in. - w automatyce: modelowanie procesów o trudnej do zdefiniowania dynamice (wymieniki ciepła, masy, dyfuzja, superkondensatory, zachowanie się polimerów, ruchy Browna, modelowanie fraktalne), regulatory niecałkowitego rzędu ($FOPID^\mu$), czy też analiza problemu dyfuzji anomalnej z wykorzystaniem podejścia ułamkowego rzędu i teorii półgrup. Zastosowanie równań różniczkowych niecałkowitego rzędu może być interpretowane jako uogólnienie znanych modeli całkowitego rzędu.

Powszechnie wiadomo, że procesy wymiany ciepła można również modelować z wykorzystaniem podejścia niecałkowitego rzędu. Należy zauważyć, że wszystkie znane modele mają postać transmitancji lub równania różniczkowego cząstkowego. Model przestrzeni stanów niecałkowitego rzędu dla procesu wymiany ciepła nie został jeszcze przedstawiony. W rozprawie przedstawiono propozycję nowego, przestrzennego modelu procesu wymiany ciepła w ośrodku jednowymiarowym. Idea tego modelu opiera się bezpośrednio na modelu półgrupowym dla jednowymiarowego problemu wymiany ciepła.

Tezy i zadania naukowe zrealizowane w pracy

Tezy rozprawy można zdefiniować następująco:

1. Jest możliwe podanie dokładnego opisu procesu przewodnictwa cieplnego w postaci ciągłego w czasie, nieskończenie wymiarowego równania stanu niecałkowitego rzędu. Model taki spełnia założenie o dekompozycji widma i jego skończenie wymiarowa aproksymacja może być użyta do modelowania procesu cieplnego z użyciem np. środowiska Matlab.
2. Poprawny opis procesu cieplnego może być także dokonany z użyciem modeli zastępczych w postaci transmitancji hybrydowych, zawierających zarówno część całkowitego rzędu, jak i część rzędu ułamkowego.
3. W przypadku rozważanej klasy systemów rozważane modele ciągłe w czasie mogą zostać przekształcone do postaci modeli dyskretnych o złożoności obliczeniowej umożliwiającej ich implementację na platformie typowego sterownika przemysłowego, np. sterownika PLC z użyciem znormalizowanych narzędzi programistycznych opisanych przez standard 61131-3.

Celem realizacji zdefiniowanych tez rozprawy zaplanowano i wykonano następujące zadania naukowe:

1. Opracowanie, analiza teoretyczna i weryfikacja doświadczalna ciągłych modeli niecałkowitego rzędu w przestrzeni stanu opisujących rozważany proces przewodnictwa cieplnego. Modele te powinny bazować na dobrze znanych wynikach i być ich uogólnieniem niecałkowitego rzędu.
2. Opracowanie nowej, efektywnej obliczeniowo dyskretnej metody rozwiązywania równań stanu niecałkowitego rzędu, bazującej na aproksymacji CFE.
3. Opracowanie, analiza teoretyczna i weryfikacja doświadczalna modeli dyskretnych w przestrzeni stanu, wykorzystujących aproksymacje dyskretne: FOBD i CFE.
4. Opracowanie i weryfikacja doświadczalna nowych modeli transmitancyjnych niecałkowitego rzędu dla rozważanego procesu przewodnictwa cieplnego. Modele te mają mieć postać hybrydowych (zawierających część całkowitego i niecałkowitego rzędu) transmitancji ciągłych i dyskretnych.
5. Implementacja na sterowniku PLC podstawowego elementu ułamkowego z użyciem aproksymacji FOBD i CFE oraz testy dokładności i szybkości działania tych aproksymacji.

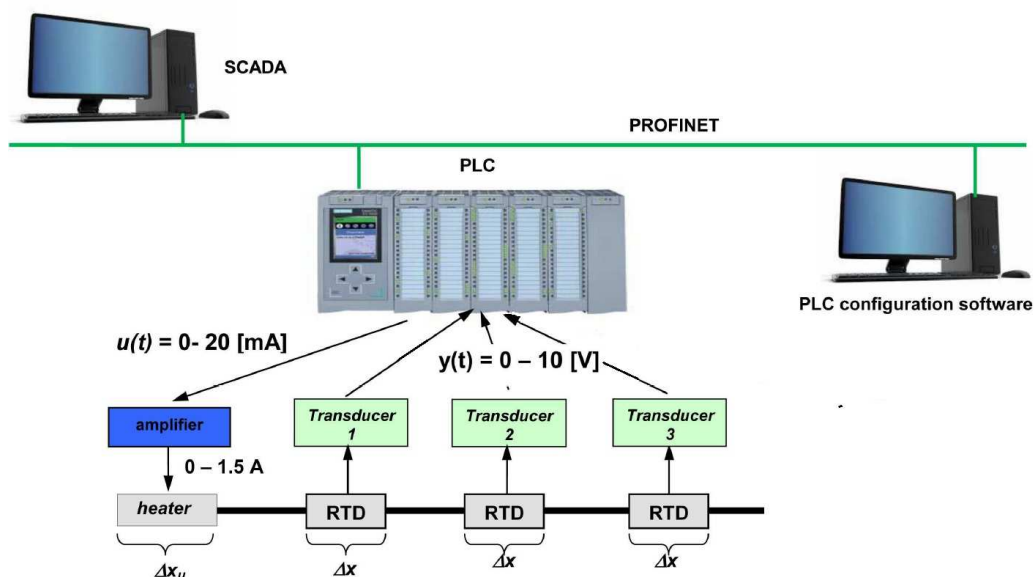
Najważniejsze wyniki pracy

Praca składa się z czterech zasadniczych rozdziałów, wstępu, podsumowania oraz trzech dodatków.

W uwagach wstępnych został podany rys historyczny oraz przykłady obecnych zastosowań rachunku niecałkowitego rzędu w automatyce - modelowanie procesów o trudnej do zdefiniowania dynamice czy też regulatory niecałkowitego rzędu. Pierwsza część rozprawy zawiera podstawowe pojęcia i definicje z zakresu rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu.

W kolejnej części rozprawy omówiono konstrukcję obiektu doświadczalnego (Rys. 1.). Podano znany model półgrupowy całkowitego rzędu dla procesu przewodnictwa cieplnego. Podano również klasyczne równanie różniczkowe procesu przewodnictwa cieplnego w ośrodku jednowymiarowym i jego modele dokładne i zastępcze całkowitego rzędu: modele zastępcze Kupfmüllera oraz Strejca w postaci transmitancji, równanie różniczkowe ciepłoprzewodnictwa oraz jego zapis w postaci równania stanu w przestrzeni Hilberta z modelem półgrupowym.

Kolejna część zawiera proponowane modele niecałkowitego rzędu i ich elementarne własności. Są to modele niecałkowitego rzędu ciągłe w czasie zdefiniowane w przestrzeni stanu, będące uogólnieniem modelu półgrupowego całkowitego rzędu:



Rys. 1. Konstrukcja systemu eksperymentalnego z jednym wejściem i trzema wyjściami

${}^c D_t^\alpha Q(x, t) = a \frac{\partial^\beta Q(x, t)}{\partial x^\beta} - R_a Q(x, t) + b(x)u(t)$ - niecałkowity rząd pochodnej “po czasie” oraz “po długości”,

${}^c D_t^\alpha Q(x, t) = a \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} - R_a Q(x, t) + b(x)u(t)$ - niecałkowity rząd pochodnej tylko “po czasie”,

$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^\beta Q(x, t)}{\partial x^\beta} - R_a Q(x, t) + b(x)u(t)$ - niecałkowity rząd pochodnej tylko “po długości”;

oraz modele zastępcze w postaci transmitancji hybrydowej niecałkowitego rzędu:

$$G_1(s) = \frac{1}{(T_{\alpha_1} s^{\alpha_1} + 1)(T_{n_1} s + 1)^{n_1}} \quad (1)$$

gdzie: T_{α_1} oraz T_{n_1} oznaczają stałe czasowe ułamkowego oraz całkowitego rzędu, $0 < \alpha_1 < 1$ oraz $n_1 \in \mathbb{Z}$ oznaczają kolejno ułamkowy i całkowity rząd transmitancji;

$$G_2(s) = \frac{1}{(T_{\alpha_2} s + 1)^{\alpha_2} (T_{n_2} s + 1)^{n_2}} \quad (2)$$

gdzie: T_{α_2} oraz T_{n_2} oznaczają również stałe czasowe rzędu ułamkowego oraz całkowitego, $0 < \alpha_2 < 1$ oraz n_2 oznaczają kolejno rząd ułamkowy i całkowity transmitancji.

Przeprowadzono analizę podstawowych własności modeli częściowo niecałkowitego rzędu oraz podano rozwiązania równania stanu dla tych modeli. Podane zostały także modele niecałkowitego rzędu dyskretnie w czasie, dla których zbadano optymalny rząd oraz okres próbkowania. Zostały podane warunki konieczne i wystarczające praktycznej stabilności układu

dyskretnego. Podano również skończenie wymiarowe aproksymacje ciągłe i dyskretne modeli niecałkowitego rzędu. W rozprawie przedstawiono porównanie dokładności oraz zbieżności wszystkich rozważanych modeli oraz przeprowadzono identyfikację parametrów badanych modeli całkowitego oraz niecałkowitego rzędu.

Z pomocą środowiska Matlab przy użyciu funkcji *fminsearch*, minimalizując wartość funkcji kosztu MSE:

$$MSE = \frac{1}{3K_s} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{K_s} e_j^+(k) \quad (3)$$

wyznaczono wszystkie parametry: α , β , a i R_a modelu niecałkowitego rzędu.

Porównywano modele:

- model 1 - całkowity rząd, $\alpha = 1$, $\beta = 2$
- model 2 - niecałkowity rząd względem długości, $\alpha = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$
- model 3 - niecałkowity rząd względem czasu, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = 2$
- model 4 - niecałkowity rząd względem czasu i długości, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

Proponowane modele niecałkowitego rzędu (model 2, model 3, model 4) zostały porównane z podstawowym modelem całkowitego rzędu (model 1). Uzyskano następujące wyniki (Tab. 1.)

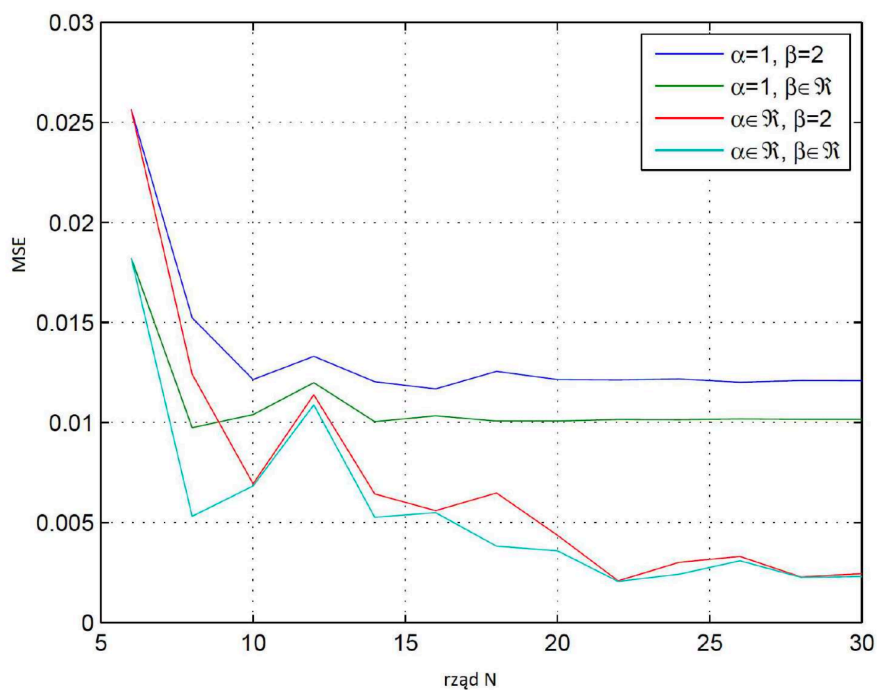
Wartość MSE jako funkcję rzędu N dla wszystkich testowanych modeli pokazano na rysunku 2.

Z tabeli 1 i rysunku 2 wywnioskowano, że najlepszym modelem opisującym rozważany obiekt cieplny (w sensie minimalizacji funkcji kosztu MSE) jest model z rzędem niecałkowitym ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

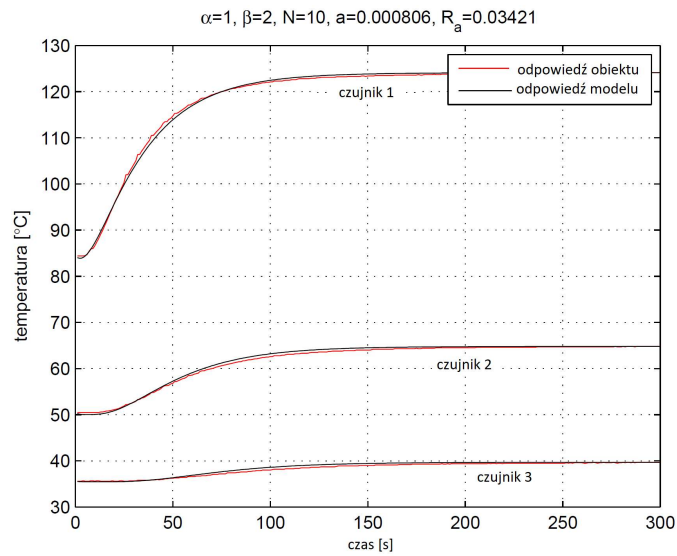
Na rysunkach 3-6 porównano odpowiedź skokową wszystkich czterech modeli z rzeczywistą odpowiedzią dla wcześniej wybranego optymalnego rzędu N .

Tabela 1. Funkcja kosztu MSE (3) dla różnych N oraz wszystkich testowanych modeli

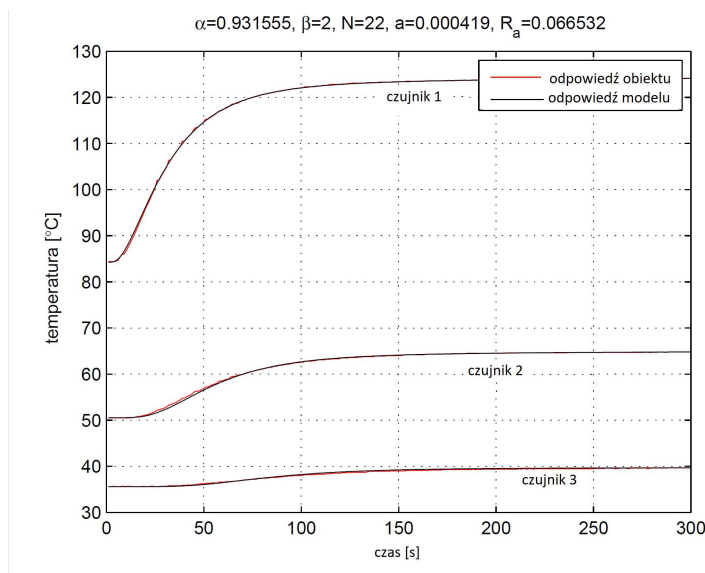
Rząd N	model 1 $\alpha = 1,$ $\beta = 2$	model 2 $\alpha = 1,$ $\beta \in \mathbb{R}$	model 3 $\alpha \in \mathbb{R},$ $\beta = 2$	model 4 $\alpha \in \mathbb{R},$ $\beta \in \mathbb{R}$
6	0.296082	0.210358	0.296048	0.210324
8	0.175856	0.112488	0.143381	0.061347
10	0.140216	0.120017	0.080125	0.078878
12	0.153525	0.138439	0.131474	0.125623
14	0.138942	0.115968	0.074268	0.060765
16	0.134770	0.119325	0.064554	0.063440
18	0.144883	0.116270	0.074788	0.044133
20	0.140243	0.116270	0.050416	0.041390
22	0.139945	0.117205	0.024154	0.007108
24	0.140586	0.117074	0.034738	0.010223
26	0.138594	0.117506	0.038179	0.112364
28	0.139619	0.117264	0.026374	0.007762
30	0.139486	0.117294	0.028256	0.008315



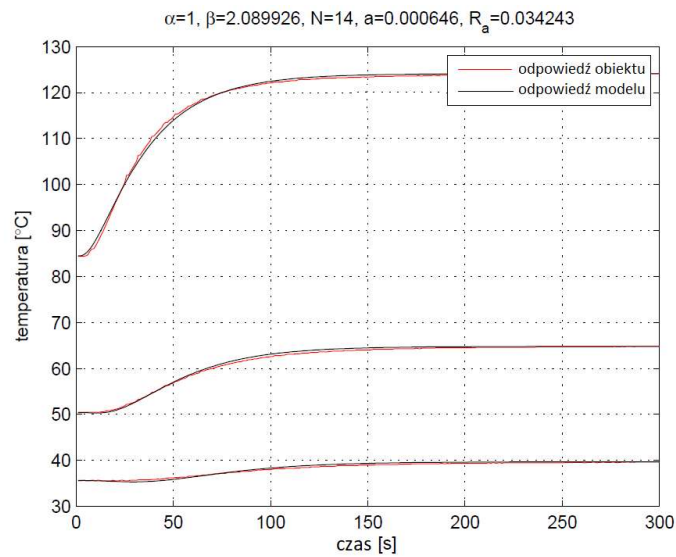
Rys. 2. Zależność wartości funkcji kosztu MSE od rzędu N dla wszystkich testowanych modeli



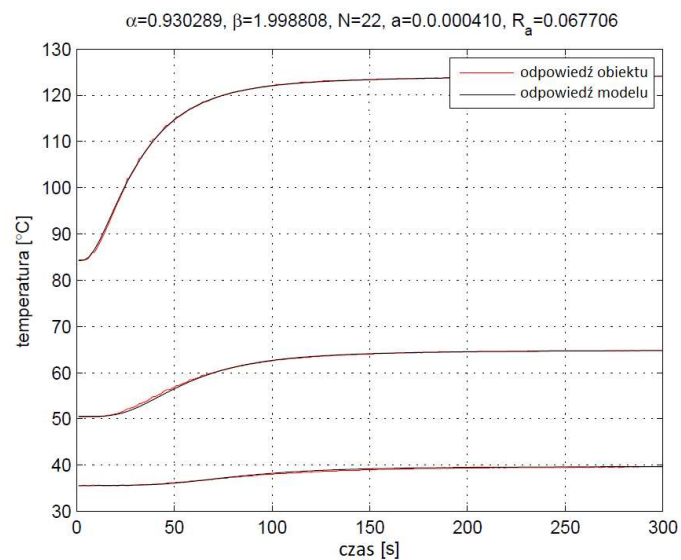
Rys. 3. Odpowiedź skokowa obiektu oraz modelu 1 z rzędem całkowitym ($\alpha = 1$, $\beta = 2$) oraz optymalnym rzędem $N = 10$, $a = 0.000806$, $R_a = 0.034214$



Rys. 4. Odpowiedź skokowa obiektu oraz modelu 2 z rzędem niecałkowitym ($\alpha = 0.931555$, $\beta = 2$) oraz optymalnym rzędem $N = 22$, $a = 0.000419$, $R_a = 0.066532$



Rys. 5. Odpowiedź skokowa obiektu oraz modelu 3 z rzędem niecałkowitym ($\alpha = 1, \beta = 2.089926$) oraz optymalnym rzędem $N = 14, a = 0.000646, R_a = 0.034243$



Rys. 6. Odpowiedź skokowa obiektu oraz modelu 4 z rzędem niecałkowitym ($\alpha = 0.930289, \beta = 1.998808$) oraz optymalnym rzędem $N = 22, a = 0.000410, R_a = 0.0677066$

Oszacowano również optymalny rząd wszystkich proponowanych modeli w przestrzeni stanów.

Wnioski z porównania badanych ciągłych modeli w przestrzeni stanu eksperymentalnego obiektu sformułowano następująco:

- W rozprawie przedstawiono problem identyfikacji parametrów dla niecałkowitego rzędu modeli w przestrzeni stanów procesu wymiany ciepła.
- Porównano 4 różne modele - pierwszy klasyczny - rzędu całkowitego $\alpha = 1, \beta = 2$ oraz 3 modele niecałkowitego rzędu $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 2$ i $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$.
- Wszystkie proponowane modele niecałkowitego rzędu są dokładniejsze w sensie funkcji kosztu MSE niż znany model rzędu całkowitego.
- Najlepszym modelem pod względem minimalizacji funkcji kosztu MSE jest model o niecałkowitym rzędzie ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Ten model jest najdokładniejszy, ale wolniej zbieżny niż pozostałe modele.
- Najszybszą zbieżność osiąga model rzędu całkowitego ($\alpha = 1, \beta = 2$), ale jest on najmniej dokładny.
- We wszystkich testowanych modelach dokładność modelu zależy od rzędu aproksymacji N - im wyższy rząd N , tym lepsza dokładność.
- Dla każdego z modeli można wyznaczyć optymalny rząd aproksymacji N :
 - $\alpha = 1, \beta = 2 - N = 10$
 - $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{R} - N = 22$
 - $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 2 - N = 14$
 - $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} - N = 22$
- W dalszych badaniach autorka planuje testować stabilność, sterowalność oraz obserwowalność tych modeli.

W ostatniej części rozprawy zaproponowane modele są weryfikowane z wykorzystaniem wyników eksperymentów na platformie sprzętowo-programowej sterownika PLC. Podano konstrukcje układów eksperymentalnych na platformie PLC wykorzystujące rodzinę SIEMENS S7 (PLC SIEMENS SIMATIC S7 1200 oraz PLC SIEMENS SIMATIC S7 1500). Implementacja aproksymacji omawianych modeli dyskretnych na platformie sterownika PLC została wykonana zgodnie z podejściem obiektowym zalecanym w normie 61131-3. Została przeprowadzona

optymalizacja rzędu i identyfikacja parametrów rozważanych modeli w przestrzeni stanu z wykorzystaniem funkcji kosztu MSE. Przeprowadzono testy dokładności, szybkości działania oraz spełnienia wymagań czasu rzeczywistego w implementacji na platformie PLC.

Wnioski z testów spełnienia wymagań czasu rzeczywistego podczas realizacji obliczeń ułamkowych sformułowano następująco:

- Elementarny obiekt rzędu ułamkowego wyrażony transmitancją s^α można zaimplementować na platformie PLC przy użyciu znormalizowanych narzędzi programowych,
- Czas realizacji implementacji CFE jest znacznie krótszy niż w przypadku PSE,
- Czasy podczas wykonywania obliczeń FO silnie zależą od rzędu aproksymacji. Implikuje to fakt, że aproksymacja CFE jest znacznie szybsza niż PSE, która wymaga znacznie większej długości pamięci niezbędnej do uzyskania dobrej dokładności.

Wyniki eksperymentów pokazały, że implementacja PLC elementu ułamkowego rzędu dla aproksymacji CFE jest znacznie szybsze niż dla aproksymacji PSE. Zastosowanie aproksymacji CFE pozwala na otrzymanie poprawnie działającego elementu rzędu ułamkowego o rozsądnym rzędzie i krótkim czasie wykonania. Można to wskazać jako zaletę tej metody w porównaniu z aproksymacją PSE, gdzie podobna dokładność wymaga od nas zastosowania znacznie wyższego rzędu i bardziej złożonego modelu. Pozwala to na sformułowanie ostatecznego wniosku, że metoda CFE może być rekomendowana do stosowania w trudnych implementacjach czasu rzeczywistego.

Pokazano również zależności wartości funkcji kosztu MSE i czasu trwania obliczeń od długości pamięci L w aproksymacji PSE oraz wartości rzędu M w aproksymacji CFE dla różnych rzędów α .

Wnioski z badań przeprowadzonych w tym rozdziale sformułowano następująco:

- Elementarny układ rzędu ułamkowego, wyrażony przez transmitancję s^α , można zaimplementować na platformie PLC przy użyciu znormalizowanych narzędzi programowych i podejścia obiektowego zalecanego przez normę IEC 61131,
- Dokładność modelu jest określona przez rząd aproksymacji: wyższy rząd daje większą dokładność,
- Aproksymacja CFE wymaga od nas użycia znacznie krótszej pamięci niż metoda PSE,

- Czas realizacji implementacji CFE jest znacznie krótszy niż w przypadku PSE. Jednocześnie dokładność obu prezentowanych metod jest porównywalna,
- Zastosowanie aproksymacji CFE pozwala uzyskać poprawnie działający element rzędu ułamkowego o sensownym rzędzie. Można to wskazać na zaletę tej metody w przeciwieństwie do aproksymacji PSE, gdzie podobna dokładność wymaga od nas użycia znacznie wyższego rzędu i bardziej złożonego modelu.

Wyniki zaprezentowane w rozprawie pokazują, że implementacja PLC elementu ułamkowego rzędu dla aproksymacji CFE jest znacznie szybsza niż dla aproksymacji PSE. Jej dokładność jest akceptowalnie mniejsza. Pozwala to na sformułowanie ostatecznego wniosku, że metoda CFE może być rekomendowana do stosowania w trudnych implementacjach czasu rzeczywistego.

Wszystkie podane modele niecałkowitego rzędu dla procesów przewodnictwa cieplnego można zastosować do zaimplementowania na platformie PLC. W szczególności można je użyć do:

1. sterowania bazującego na modelowaniu (Model Based Control),
2. sterowania bazującego na modelu diagnostycznym uszkodzeń (Model Based Fault Detection - MBFD).

Podsumowanie

Rozprawa zawiera opracowanie, analizę teoretyczną, identyfikację oraz weryfikację doświadczalną dla nowych, zaproponowanych przez autorkę modeli niecałkowitego rzędu dla procesów przewodnictwa cieplnego.

Porównano cztery modele ciągłe zdefiniowane w przestrzeni stanu: pierwszy klasyczny, rzędu całkowitego oraz trzy nowe modele niecałkowitego rzędu. Wszystkie proponowane modele niecałkowitego rzędu są dokładniejsze w sensie funkcji kosztu MSE niż ich odpowiedniki całkowitego rzędu. Najlepszym modelem pod względem minimalizacji funkcji kosztu MSE jest model o niecałkowitym rzędzie zarówno wzdłuż długości, jak i czasu.

Przystawiono nową, efektywną obliczeniowo dyskretną metodę rozwiązywania równań niecałkowitego rzędu, bazującą na aproksymacji CFE. Zaproponowano również dyskretne modele w przestrzeni stanu wykorzystujące aproksymacje dyskretne FOBD oraz CFE. Opracowano i zweryfikowano doświadczalnie nowe modele transmitancyjne niecałkowitego rzędu w postaci hybrydowych transmitancji ciągłych i dyskretnych.

W ostatniej części dokonano implementacji na sterowniku PLC podstawowego elementu ułamkowego rzędu z użyciem dyskretnych aproksymacji FOBD i CFE. Wyniki doświadczalne wskazują, że model dyskretny może być implementowany na platformach cyfrowych PLC.

Na podstawie przeprowadzonych badań oraz uzyskanych wyników stwierdzono, że tezy pracy zostały udowodnione, gdyż:

1. Modele ciągłe w przestrzeni stanu zostały opracowane i zweryfikowane doświadczalnie.
2. Nowe hybrydowe modele transmitancyjne zostały opracowane i zweryfikowane doświadczalnie.
3. Modele dyskretny w przestrzeni stanu zostały opracowane i zweryfikowane doświadczalnie. Badania testowe dyskretnych implementacji PLC podstawowego operatora ułamkowego wykazały, że może on być zaimplementowany na platformie PLC ze spełnieniem wymagań dotyczących zarówno dokładności, jak i wymagań czasu rzeczywistego.

Jako dalsze prace w rozważanym w rozprawie kierunku zaproponowano analizę układów predykcji i detekcji awarii związanych z przegrzewaniem się elementów oraz konstrukcję algorytmów sterowania bazujących na modelu obiektu wykorzystujących zbudowane modele. Innym kierunkiem dalszych badań jest uwzględnienie niepewności parametrów modeli. Niepewność ta może być opisana np. przez liczby przedziałowe. W najbliższej przyszłości autorka planuje również optymalizację proponowanych modeli niecałkowitego rzędu z użyciem metod metaheurystycznych inspirowanych przez naturę.