



Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki
i Inżynierii Biomedycznej

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń
struktury w wybranych obszarach
geometrycznych z wykorzystaniem teorii
spektralnej

Mateusz Brzęk

Promotor: prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Kraków, 2020

Wstęp

Celem pracy było stworzenie algorytmu, metody i narzędzi za pomocą których możliwe będzie, przy niepełnej informacji z pomiarów, określić położenie uszkodzenia w dowolnym ale ustalonym obszarze geometrycznym. Algorytm pozyskiwania danych pomiarowych na podstawie, których stworzyłem mapy izochorowe (linie łączące punkty o tych samych wartościach), w celu odczytania obszaru położenia uszkodzenia przedstawiony jest w rozprawie doktorskiej na początku rozdziału 4. Zakresem moich badań jest kilka różnych obszarów geometrycznych takich jak: kwadrat, koło, elipsa, trójkąty (równoboczny, równoramienny, prostokątny) z uszkodzeniem wewnątrz nich. Dla tych obszarów przeprowadziłem analizę widma operatora Laplace'a otrzymanego przy pomocy pakietu PDEToolbox (Partial Differential Equation Toolbox) programu MATLAB. Na podstawie twierdzenia spektralnego mogę wyróżnić najmniejszą wartość własną λ_{min} i największą wartość własną λ_{max} (λ_{max} wynika z ograniczoności obliczeń numerycznych). Pomyśłem na rozwiązanie problemu lokalizowania uszkodzenia jest wydzielenie z każdego pomiaru widma dla poszczególnych obszarów wartości najmniejszej λ_{min} i wartości największej λ_{max} wartości własnych i stworzenie na ich podstawie map izochorowych (linie łączące punkty o tych samych wartościach). To z połączenia tych dwóch map i posiadanym odczycie widma, dla każdego kształtu geometrycznego z osobna otrzymałem obszary, w których znajduje się uszkodzenie.

Opis rozprawy doktorskiej

Rozdział pierwszy zatytułowany "Wstęp" zawiera przegląd literatury na podstawie, której rozpocząłem i kontynuowałem badania nad problemem lokalizowania uszkodzenia. W drugiej części rozdziału opisuję koncepcję, strukturę i tezę rozprawy doktorskiej.

Rozdział drugi zatytułowany "Teoria Spektralna" zawiera podstawowe definicje i twierdzenia przestrzeni Hilberta, Sobolewa oraz przestrzeni L^p .

Rozdział trzeci zatytułowany "Metoda Elementów Skończonych" zawiera opis metody elementów skończonych zaimplementowany w pakiecie PDE Toolbox programu Matlab.

Rozdział czwarty zatytułowany "Wyniki badań podstawowych obszarów

geometrycznych” zawiera opis wyników doświadczeń numerycznych. Na początku rozdziału opisuję algorytm i metodę wykonywania pomiarów. Następnie opisuję wyniki i podaję przykłady lokalizowania obszarów z uszkodzeniem przy użyciu map izochorowych dla obszarów jakimi są kwadrat, koło i elipsa. Dla obszarów geometrycznych jakimi są trójkąt równoboczny, równoramienny i prostokątny przedstawiłem metodę identyfikacji wizualnej obszarów z uszkodzeniem.

Rozdział piąty zatytułowany ”Analiza widma operatora Laplace’a dla kwadratów o bokach 1, 2, 3 z uszkodzeniem wewnętrznym” zawiera analizę widma operatora Laplace’a dla uszkodzonego obszaru geometrycznego jakim są kwadraty o wymiarach $[0, 1] \times [0, 1]$, $[0, 2] \times [0, 2]$ i $[0, 3] \times [0, 3]$. W rozdziale tym odpowiadam na pytania dotyczące podobieństwa między poszczególnymi widmami. Zastanawiam się czy istnieje zależność między kształtem map izochorowych i powierzchni trójwymiarowych z długością boku kwadratów. Kolejne pytanie na jakie odpowiadam jest symetria widma dla poszczególnych kwadratów.

Rozdział szósty zatytułowany ”Porównanie obrazów numerycznego widma operatora Laplace’a dla kół o promieniach 1 i 2 z uszkodzeniem wewnętrznym” zawiera porównanie kolorowych map izochorowych i powierzchni trójwymiarowych kół o promieniach 1 i 2. Porównuję między sobą mapy wartości najmniejszych λ_{min} i wartości największych λ_{max} wartości własnych. Badam właściwości symetrii i regularności dla poszczególnych map izochorowych.

Rozdział siódmy zatytułowany ”Podsumowanie” jest zebraniem i opisaniem osiągniętych wyników w prezentowanej rozprawie doktorskiej.

Teza pracy

Możliwe jest wykrywanie i lokalizacja położenia uszkodzenia (nieciągłości) w obszarach geometrycznych takich jak kwadrat, koło, elipsa, trójkąty równoboczny, równoramienny i trójkąt prostokątny z wykorzystaniem widma operatora Laplace’a jako szczególnego przykładu operatora eliptycznego.

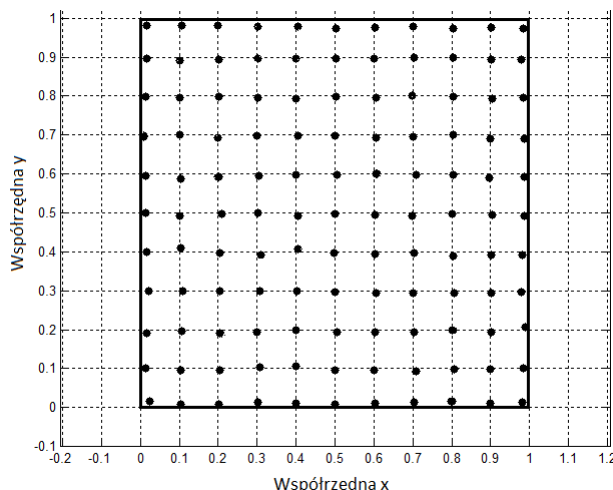
W następnej części autoreferatu, jako przykład przedstawię wyniki badań dla obszaru geometrycznego jakim jest kwadrat jednostkowy. Przedstawię siatkę punktów pomiarowych, mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych oraz sposób w jaki lokalizowałem uszkodzenie.

Przykładowe wyniki badań dla obszaru geometrycznego jakim jest kwadrat jednostkowy

Jako przykładowy obszar geometryczny, który poddałem badaniom przedstawię kwadrat jednostkowy, tzn. kwadrat o bokach równych 1. Problem spektralny dla tak zadanego obszaru zapisuję w postaci:

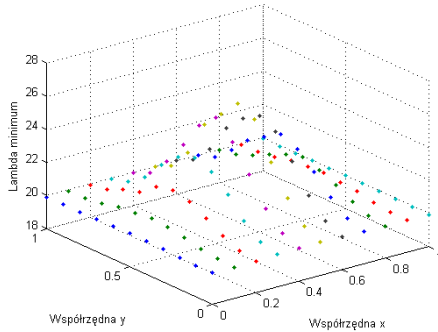
$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = -\lambda u(x, y) & \text{w } [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, y) = 0 & \text{na } \partial([0, 1] \times [0, 1]) . \end{cases} \quad (1)$$

Poniżej, na rysunku 1 przedstawiona jest siatka punktów, w których umieszczałem zniekształcenie i dokonywałem pomiaru widma operatora Laplace'a. Do każdego punktu z osobna stosowałem algorytm opisany na początku rozdziału 4 rozprawy doktorskiej. W ten sposób otrzymałem pomiary

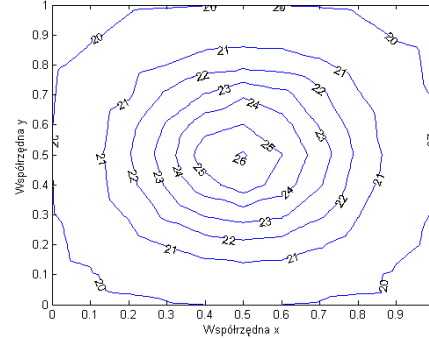


Rysunek 1: Siatka punktów, w których umieszczałem zniekształcenie i dokonywałem pomiaru widma.

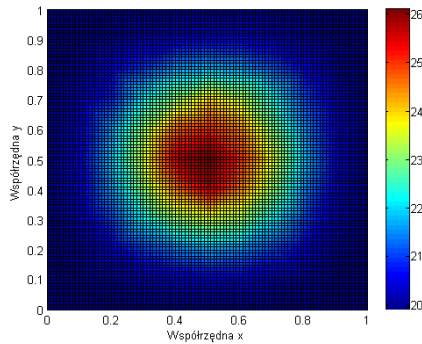
widma, z którego mogłem wyodrębnić najmniejszą wartość własną λ_{min} i największą wartość własną λ_{max} dla każdego punktu i na ich podstawie stworzyć mapy izochorowe (Rysunki 2 i 3). Rysunek 2 a) przedstawia chmurę wartości λ_{min} w punktach pomiarowych, po których połączeniu otrzymałem mapy izochorowe najmniejszych wartości własnych λ_{min} . Dwuwymiarowa prezentacja danych (Rysunek 2 b), c)) pokazuje jak układają się wartości λ_{min} dla poszczególnych punktów pomiarowych. Linie izochorowe tworzą współśrodkowe



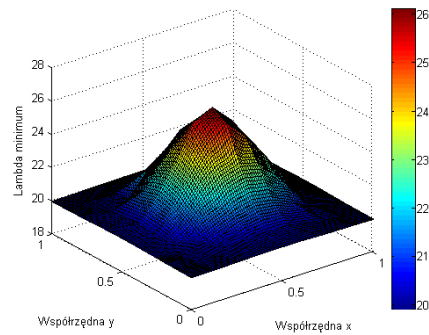
(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy wykresy dla λ_{min}



(b) Mapa izochorowa dla λ_{min}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{min}



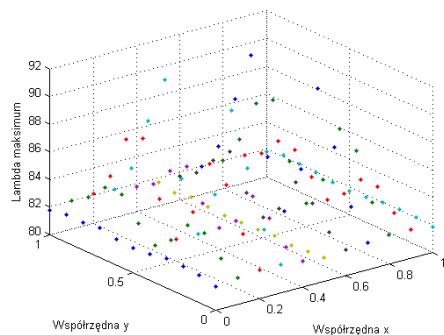
(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{min}

Rysunek 2: Graficzna prezentacja danych wartości najmniejszych λ_{min} dla kwadrata $[0,1] \times [0,1]$.

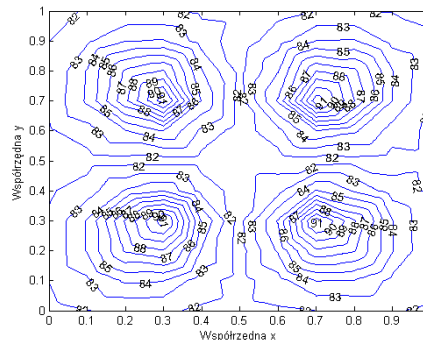
okręgi, których środkiem jest punkt $(0.5, 0.5)$. Wartości przyporządkowane poszczególnym liniom wzrastają w kierunku środka okręgów. Idealnie obrazuje to trójwymiarowa prezentacja danych (Rysunek 2 d)). Na Rysunku 2 c) widać, że w przypadku kolorowej mapy izochorowej wartości najmniejszych λ_{min} występuje pełna symetria, tzn. symetria względem dowolnej przekątnej i dowolnych środkowych boków kwadratu.

Rysunek 3 przedstawia graficzną prezentację danych pomiarowych λ_{max} . Rysunek 3 a) przedstawia chmurę punktów pomiarowych, z których tworzyłem wykresy dla λ_{max} . Pierwszą własnością wartości największych widna jaka się narzuca jest ich symetria względem prostych $x = 0.5$ i $y = 0.5$.

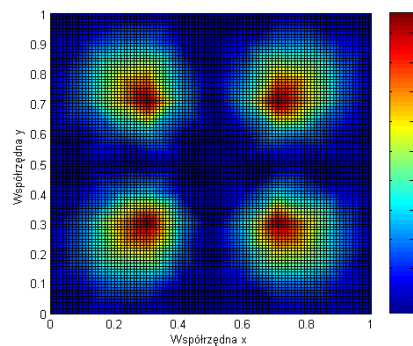
Mateusz Brzęk *Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej*



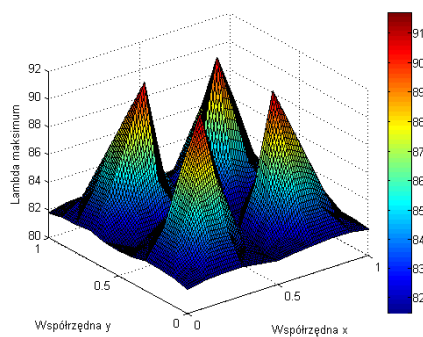
(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy wykresy dla λ_{max}



(b) Mapa izochorowa dla λ_{max}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{max}

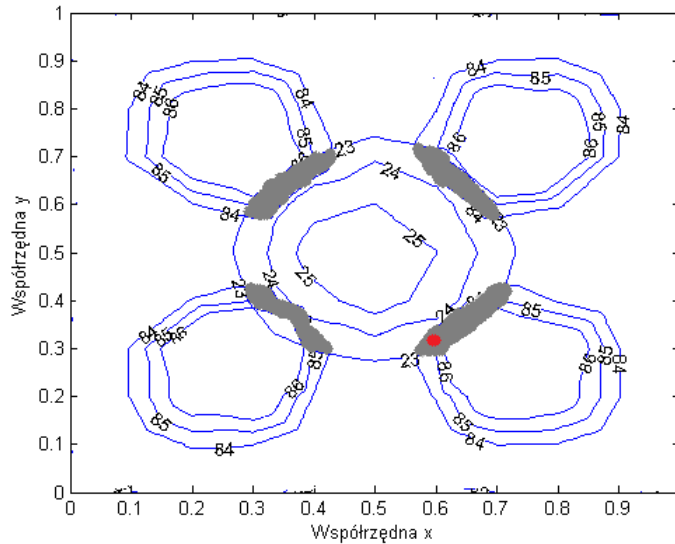


(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{max}

Rysunek 3: Graficzna prezentacja danych wartości największych λ_{max} dla kwadratu $[0,1] \times [0,1]$.

Na Rysunkach 3 b) i c) widzimy cztery rodziny owalnych okręgów współśrodkowych. Ich środki a zarazem punkty, w których osiągane są największe wartości λ_{max} , to punkty $(0.3, 0.3)$, $(0.3, 0.7)$, $(0.7, 0.3)$ i $(0.7, 0.7)$. Osiągane wartości, to odpowiednio liczby: 88.38, 88.70, 88.49, 88.63. Rysunek 3 d) przedstawia trójwymiarowy wykres λ_{max} . Widzimy na nim symetrycznie rozłożone cztery ostrosłupy nachylone ku środkowi kwadratu. Najmniejsza wartość jaką przyjmuje λ_{max} , to 81.29. Natomiast największą wartością jest 88.70. Średnia wartość λ_{max} wynosi 82.99, a rozstęp równy jest $R = 7.41$.

Przykład ilustrujący lokalizowanie uszkodzenia w kwadracie jednostkowym



Rysunek 4: Przykład ilustrujący miejsce położenia uszkodzenia w kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$.

Jako przykład ilustrujący moje rozważania, rozpatrzmy widmo postaci $[24.00, 50.36, 59.81, 85.10]$. Dla tego pomiaru wartość minimalną wartości własnych to $\lambda_{min} = 24.00$. Natomiast wartością maksymalną wartości własnych jest $\lambda_{max} = 85.10$. Z mapy izochorowej wartości minimalnych (Rysunek 2 b)) wybieram obszar (pierścienie) z zakresem $[23, 25]$. Dla wartości maksymalnej wartości własnych z mapy izochorowej (Rysunek 3 b)) wartości maksymalnych wybieram obszary (4 pierścienie) z zakresem $[84, 86]$. Wspólna część obydwu obszarów (odcinki koła o kolorze szarym na Rysunku 4) jest obszarem, w którym znajduje się uszkodzenie. Czerwona kropka wskazuje dokładne położenie uszkodzenia. Jest ono w punkcie $(0.6, 0.3)$.

Podsumowując ogólny sposób w jaki użytkownik może określić położenie uszkodzenia, to po pierwsze, z uzyskanego pomiaru należy wyodrębnić wartość najmniejszą λ_{min} i wartość największą λ_{max} widma. Następnie z map izochorowych najmniejszych i największych wartości własnych należy wyodrębnić odpowiednie obszary. Jako ostatni etap łączymy wyodrębnione obszary w jeden rysunek i w ten sposób otrzymujemy położenie uszkodzenia.

Dla obszarów geometrycznych jakimi są koło jednostkowe, elipsa i trójkąty równoboczny, równoramienny i trójkąt prostokątny odpowiednie przykłady i wyniki badań zaprezentowane są w rozprawie doktorskiej.

Podsumowanie wyników pracy naukowej

Jako moje główne osiągnięcia, oczywiście poza wykazaniem na przykładach tezy rozprawy doktorskiej, wypunktować mogę następujące fragmenty:

- 1) Stworzenie metody i algorytmu uzyskiwania danych potrzebnych do stworzenia map izochorowych.
- 2) Stworzenie map izochorowych wartości najmniejszych i wartości największych wartości własnych następujących obszarów geometrycznych: kwadrat, koło, elipsa oraz obszarów rozstępów dla obszarów jakimi są trójkąt równoboczny, trójkąt równoramienny i trójkąt prostokątny.
- 3) Metoda określenia położenia uszkodzenia na podstawie map izochorowych następujących obszarów geometrycznych: kwadrat, koło, elipsa.
- 4) Metoda identyfikacji wizualnej położenia uszkodzenia następujących obszarów geometrycznych: trójkąt równoboczny, trójkąt równoramienny i trójkąt prostokątny.
- 5) Kolorowe mapy izochorowe kwadratów o bokach równych 1, 2 i 3.
- 6) Rysunki przedstawiające symetrię najmniejszych i największych wartości własnych kwadratów o bokach równych 1, 2 i 3.
- 7) Kolorowe mapy izochorowe najmniejszych i największych wartości własnych kół o promieniach 1 i 2.

Opublikowane wyniki badań

1. Brzęk M., Zagórska M., Mitkowski W. *The approximate location of imperfections in ellipse using the spectral theory*. Measurement Automation Monitoring vol. 62, no. 4: 136-138, 2016.

2. Brzęk M., Zagórska M., Mitkowski W. *The approximate location of imperfection in a unit circle using spectrum of Laplace operator as a research tool.* Automatyka vol. 60, no. 19: 9-15, 2015.
3. Brzęk M., Mitkowski W. *Lokalizacja uszkodzeń w zadanym obszarze z wykorzystaniem teorii spektralnej.* Pomiary, Automatyka, Kontrola, vol. 60, no. 1: 53-55, 2014.