

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

Rozprawa doktorska

Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej

Mateusz Brzęk

Promotor: prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Kraków, 2019

Oświadczenie autora rozprawy:

Oświadczam, świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę wykonałem osobiście i samodzielnie oraz że nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

podpis autora pracy

Serdecznie dziękuję promotorowi, Panu prof. dr hab. inż. Wojciechowi Mitkowskiemu, za opiekę i wsparcie w trakcie studiów doktoranckich. Ponadto dziękuję za cenne uwagi i wskazówki w trakcie pisania rozprawy doktorskiej.

Streszczenie

W niniejszej pracy rozważam zagadnienie własne dla operatora Laplace'a z zerowymi warunkami brzegowymi postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\lambda u(x,y) & \text{w } \Omega\\ u(x,y) = 0 & \text{na } \Omega \end{cases}.$$
 (1)

Prezentuję wyniki badań nad wykrywaniem i lokalizacją uszkodzenia dla obszarów geometrycznych Ω jakimi są kwadrat o boku długości jeden, koło o promieniu jednostkowym i środku w początku układu współrzędnych , elipsie o małej półosi równej 1 i dużej półosi równej 1.5 oraz trójkątów równobocznym, równoramiennym i prostokątnym. Widmo operatora Laplace'a służy mi jako narzędziem dzięki, któremu stworzyłem mapy izochorowe podanych obszarów, po to aby na ich podstawie i odczytu widma dla obszaru z uszkodzeniem wykryć i zlokalizować uszkodzenie. Dla kwadratu, koła i elipsy pokazuję bezpośrednią metodę odczytu położenia uszkodzenia na podstawie stworzonych map izochorowych. W przypadku trójkątów prezentuję metodę identyfikacji wizualnej wykrycia i lokalizowania uszkodzenia polegającą na odczytaniu obszarów z map stworzonych przy użyciu rozstępu czyli różnicy między wartością największą wartości własnych a najmniejszą wartością wartości własnych. W symbolice matematycznej rozstęp zapisujemy następującym równaniem $R = \lambda_{max} - \lambda_{min}$.

Ponadto rozważam własności widma operatora Laplace'a dla kwadratów o długości boków 1, 2 i 3 oraz kół o promieniu równym 1 i 2. Analizuję ich widmo szukając podobieństwa między nimi. Osobno dla poszczególnych figur geometrycznych. Badam symetrię i regularność widma na podstawie kolorowych map izochorowych i trójwymiarowych powierzchni minimalnych λ_{min} i maksymalnych λ_{max} wartości własnych. Podaję zależność między postacią widma kolejnych kwadratów a długością ich boków.

Abstract

In this work, I consider eigenvalue problem for the Laplace operator with zero boundary conditions of the form

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\lambda u(x,y) & \text{w } \Omega\\ u(x,y) = 0 & \text{na } \Omega \end{cases}.$$
(2)

I present the results of research on the detection and location of damage for geometric areas Ω such as square with side length one, circle with unit radius and center at the origin, ellipse with half-axis equal to 1 and a large half-axis equal to 1.5 and equilateral triangle, isosceles triangle and rectangular triangle. I use spectrum of the Laplace operator as a tool thanks to which I created the isochoric maps of the given areas, in order to determine the location of the damage based on the maps and the spectrum of the area with damage. For square, circle and ellipse, I show a direct method of reading the location of damage based on created isochor maps. In the case of triangles, I present the method of visual identification of the location of the damage by reading the areas from the maps created using the range, i.e. the difference between the value of the largest eigenvalues and the smallest value of eigenvalues. In mathematical symbolism, the range is written with the following equation $R = \lambda_{max} - \lambda_{min}$.

In addition, I consider the Laplace operator's spectral properties for squares with side lengths 1, 2 and 3 and circles with radius equal to 1 and 2. I analyze their spectrum looking for similarities between them. Separately for individual geometric figures. I study the symmetry and regularity of the spectrum based on color isochoric maps and three-dimensional minimum surfaces λ_{min} and maximum λ_{max} eigenvalues. I give the dependence between the form of the spectrum of subsequent squares and the length of their sides.

Spis treści

1	Wst	.ęp		7
	1.1	Przegląd	literatury	7
	1.2	Koncepc	ja i opis rozprawy doktorskiej. Teza pracy	10
2	Teo	ria spekt	ralna	13
	2.1	Definicje strzeni L	i twierdzenia przestrzeni Hilberta, Sobolewa oraz prze- p \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	13
	2.2	Definicje zwartvch	i własności liniowych operatorów samosprzężonych i . Twierdzenie spektralne	20
	2.3	Zagadnie	enie własne dla operatora Laplace'a	27
3	Met	oda elen	nentów skończonych	32
	3.1	Opis Met	tody Elementów Skończonych dla Matlab PDE Toolbox	32
		3.1.1 Z	agadnienie własne	38
4	Wy	niki bada	ań podstawowych obszarów geometrycznych	43
	4.1	Kwadrat	o wymiarach $[0,1] \times [0,1]$	47
		4.1.1 O	pis doświadczenia oraz uzyskanych wyników	47
		4.1.2 P	rzykład ilustrujący lokalizowanie uszkodzenia w kwa-	
		di	racie jednostkowym	51
	4.2	Koło jedz	nostkowe $S((0,0),1)$	53
		4.2.1 O	pis doświadczenia oraz uzyskanych wyników	53
		4.2.2 P	rzykład ilustrujący lokalizowanie uszkodzenia w kole	
		je	ednostkowym	57
	4.3	Elipsa .	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	58
		4.3.1 O	pis doświadczenia oraz uzyskanych wyników	58
		4.3.2 P	rzykład ilustrujący lokalizowanie uszkodzenia w elipsie	62
	4.4	Trójkąty	·····	63

	4.4.1 Trójkąt równoboczny	63 66 68 71					
5	Analiza widma operatora Laplace'a dla kwadratów o bokach1, 2, 3 z uszkodzeniem wewnętrznym5.1 Wprowadzenie5.2 Opis i analiza otrzymanych wyników	73 73 74					
6	 Porównanie obrazów numerycznego widma operatora Lapl ce'a dla kół o promieniach 1 i 2 z uszkodzeniem wewnętr nym 6.1 Wprowadzenie						
7	Podsumowanie	87					
\mathbf{Li}	Literatura 9						

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Przegląd literatury

Zagadnienie lokalizowania uszkodzenia w zadanym obszarze z wykorzystaniem teorii spektralnej w literaturze naukowej jest badany i opisywany przez wielu autorów. W pozycji naukowej [47] autorka przedstawia procedurę przybliżonego lokalizowania uszkodzenia w obszarze (z uszkodzeniem i bez uszkodzenia), którym jest kwadrat jednostkowy. Dla tych obszarów definiowane są problemy spektralne, których rozwiązaniami są nieskończone ciągi par wartości własnych i odpowiadających im funkcji własnych (λ_k, u_k) dla k = 1, 2, 3, ...Głównym celem pracy autorki było rozwiązanie zagadnienia odwrotnego, które polegało na lokalizowaniu zniekształcenia obszaru na podstawie wektora wartości własnych. W celu wyznaczenia lokalizacji zniekształcenia autorka zdefiniowała nowe odwzorowanie, którym była warunkowa wartość oczekiwana położenia deformacji pod warunkiem, że znamy skończony ciąg wartości własnych. Odwzorowanie to było aproksymowane przez tak zwany ciąg aproksymacyjny, którym była rodzina sieci neuronowych Elmana.

Metody wykrywania deformacji przy użyciu algorytmów numerycznych stworzonych dla rozwiązania problemu odwrotnego zostały opisane również w innych pozycjach naukowych [28], [31], [45]. W pierwszej z nich autorzy w poszukiwaniu nieznanych współrzędnych uszkodzenia w danym obszarze dokonują asymptotycznej analizy cząstkowego równania różniczkowego jakim jest równanie Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta dla danego obszaru z uszkodzeniem oraz definiują tak zwaną pochodną topologiczną, która posłuży do przybliżenia funkcjonału kształtu. Następnie używają samosprzężonego rozszerzenia operatora eliptycznego aby zamodelować rozwiązanie dla postawionego zagadnienia. Do zidentyfikowania uszkodzenia, w tym przypadku, wykorzystywany jest funkcjonał najmniejszych kwadratów. Drugą metodą jaką proponują autorzy w tej samej publikacji jest wykorzystanie sieci neuronowej w celu odwrócenia odwzorowania, które jest stowarzyszone ze zbiorem funkcjonałów kształtu.

Problem odwrotny (Inverse Problem) jest zadaniem, które polega na wyznaczeniu parametrów modelu na podstawie obserwowanych wartości. Problem odwrotny jest bardzo ważnym zagadnieniem matematycznym w naukach technicznych, ponieważ mówi nam o parametrach, których nie możemy zmierzyć bezpośrednio. Ma szerokie zastosowanie między innymi w optyce, akustyce, teorii komunikacji, przetwarzaniu sygnałów, medycznej diagnostyce obrazowej, astronomii, geofizyce, oceanografii, defektoskopii i wielu innych dziedzinach technicznych. Opis poszczególnych zagadnień i problemów związanych z problemem odwrotnym możemy znaleźć miedzy innymi w ksiażkach [34], [38], [55]. Natomiast w pozycji [48] opisane są techniki komputerowe zagadnienia odwrotnego zastosowane w badaniach nieniszczących. Ponadto wymienić należy pionierskie badania Marka Kaca zawarte w artykule o słynnym tytule "Czy da się usłyszeć kształt bębna?" (ang. Can One Hear the Shape of a Drum?) [36]. Ogólny schemat obrazujący zależność między zagadnieniem pierwotnym a zagadnieniem odwrotnym możemy przedstawić w postaci poniższego schematu.

Problem pierwotny: Dane \longrightarrow Parametry Modelu.

Problem odwrotny: Parametry Modelu \longrightarrow Dane.

Używając symboliki matematycznej problem pierwotny możemy zapisać w postaci równania

$$d = Gm, \tag{1.1}$$

gdzie d są danymi uzyskanymi z pomiarów, m są parametrami modelu a G jest modelem matematycznym (macierz albo operator).

W niniejszej rozprawie autor za model matematyczny przyjął zagadnienie własne operatora Laplace'a dla różnych obszarów geometrycznych z uszkodzeniem, gdzie głównym parametrem jaki mnie interesuje są współrzędne uszkodzenia a dokładniej przybliżone obszary w których znajduje się uszkodzenie. Danymi, które uzyskaliśmy do analizy są wartości własne operatora Laplace'a. To na ich podstawie tworzę mapy izochorowe (linie łączące punkty o tych samych wartościach), z których odczytujemy przybliżone obszary, w których znajduje się uszkodzenie. W obiektach rzeczywistych lokalizowa-

nie i wykrywanie uszkodzeń realizuje się na wiele sposobów. Na przykład przy użyciu lasera. W strone materiału (kompozytu) przesyła sie trwajacy miliardową część sekundy impuls, który podgrzewa fragment materiału o kilkadziesiat stopni celsjusza. Następuje wtedy miejscowe rozszerzenie się cieplne materiału, co z kolej powoduje, że przez materiał przechodzi fala sprężysta. Informacje o drganiach materiału zbierane są wibrometrem laserowym. Jeśli w materiale są jakieś uszkodzenia czy pęknięcia, fala ulegnie odbiciu, załamaniu albo zmienią się jej własności. Wystarczy przeanalizować te fale, aby dowiedzieć się, czy materiał nie uległ zniszczeniu. Metoda ta jest jedną z metod NDT (non-destructive testing) czyli badań nieniszczących zmierzających do wykrycia nieciągłości materiału. Wśród metod NDT należy wymienić jeszcze badania magnetyczno-proszkowe MT (Magnetic Particie). Pozwalają one wykrywać nieciągłości powierzchniowe, a także stosunkowo duże położone blisko powierzchni, nieciągłości podpowierzchniowe. Badania metodą prądów wirowych ET (Electromagnetic lub Eddy Current) polega na wzbudzaniu zmiennego pola elektromagnetycznego w badanym materiale i odbieraniu reakcji materiału poprzez sondę badawczą i defektoskop prądowirowy. Analiza wartości zmian pola elektromagnetycznego, amplitudy oraz przesuniecia fazowego napiecia i natężenia pozwala na bardzo precyzyjna ocenę stanu badanego materiału, występujących nieciągłości w postaci np. pęknięć, ubytków erozyjnych lub korozyjnych, ocenę ich wielkości oraz głębokości. Badania penetracyjne PT (Penetrant Testing) pozwalają wykrywać nieciagłości powierzchniowe takie jak: pęknięcia, zawalcowania, rozwarstwienia, niespawy, porowatości, nieszczelności na wskroś i inne nieciągłości otwarte na powierzchni. Kolejną grupą badań są badania radiograficzne RT (Radiographic). Radiografia umożliwia uzyskiwanie obrazu prześwietlanego obiektu na kliszy radiograficznej lub w postaci cyfrowej. Obiektami poddanymi prześwietlaniu moga być wyroby z różnych materiałów jak stal, ceramika, drewno, guma, tworzywa sztuczne, betony. Badania ultradźwiękowe UT (Ultrasonic) należa do grupy badań nieniszczących najczęściej stosowanych w praktyce przemysłowej. Pozwalają wykrywać pekniecia, rozwarstwienia oraz oraz inne nieciągłości wewnątrz elementów. Ostatnią grupą badań są badania wizualne VT (Visual Testing). Polegaja one na umiejscowieniu i ocenie powierzchniowych cech jakości obiektu, takich jak: nieciagłości, zniekształcenia, ogólny stan powierzchni ludzkim nieuzbrojonym okiem lub przy użyciu przyrządów optycznych, optoelektronicznych, pomiarowych, itp. Pełen cykl badań wizualnych składa się z zapoznania się z obiektem badanym oraz wymaganiami jakościowymi, przygotowania powierzchni do badań, doboru odpowiedniej

metody i aparatury, sprawdzenia wyposażenia badawczego, przeprowadzenia badania oraz sporządzenia raportu. Szeroki opis tych metod znajduje się w pozycjach [25],[37],[63].

1.2 Koncepcja i opis rozprawy doktorskiej. Teza pracy

Celem pracy było stworzenie algorytmu, metody i narzędzi za pomocą których będzie możliwe, przy niepełnej informacji z pomiarów, określić położenie uszkodzenia w dowolnym ale ustalonym obszarze geometrycznym. Algorytm pozyskiwania danych pomiarowych na podstawie, których tworzymy mapy izochorowe (linie łączące punkty o tych samych wartościach) w celu odczytania obszaru położenia uszkodzenia przedstawiony jest na początku rozdziału 4. Zakresem moich badań jest kilka różnych obszarów geometrycznych takich jak: kwadrat, koło, elipsa, trójkaty (równoboczny, równoramienny, prostokatny) z uszkodzeniem wewnątrz nich. Dla tych obszarów przeprowadzam analizę widma operatora Laplace'a otrzymanego przy pomocy pakietu PDE-Toolbox (Partial Differential Equation Toolbox) programu MATLAB. Na podstawie twierdzenia spektralnego możemy wyróżnić najmniejszą wartość własną λ_{min} i największą wartość własną λ_{max} (λ_{max} wynika z ograniczoności obliczeń numerycznych). Pomysłem autora było wydzielenie z każdego pomiaru widma dla poszczególnych obszarów wartości najmniejszej λ_{min} i wartości największej λ_{max} wartości własnych i stworzenie na ich podstawie map izochorowych (linie łączące punkty o tych samych wartościach). To z połączenia tych dwóch map dla każdego obszaru z osobna dostajemy przybliżone obszary, w których znajduje się uszkodzenie.

Rozdział pierwszy zatytułowany "Wstęp" zawiera przegląd literatury na podstawie której autor rozpoczął i kontynuował badania nad problemem lokalizowania uszkodzenia. W drugiej części rozdziału opisuję koncepcję, strukturę i tezę rozprawy doktorskiej.

Rozdział drugi zatytułowany "Teoria Spektralna" zawiera podstawowe definicje i twierdzenia przestrzeni Hilberta, Sobolewa oraz przestrzeni L^p . Zaczynając od definicji ciała i przestrzeni liniowej następnie definiując iloczyn skalarny oraz przestrzeń metryczną i unitarną. W przestrzeni Hilberta podaję twierdzenie o układzie ortonormalnym i pokazuję procedurę tworzenia układu ortonormalnego. Wprowadzając definicję σ -ciała oraz przestrzeni mierzalnej dochodzę do definicji przestrzeni L^p oraz przestrzeni Sobolewa. Następnie podaję definicję rezolwenty, widma oraz promienia spektralnego operatora. Formuła Gelfanda-Beurlinga oraz alternatywa Fredholma pomogą mi w dowodzie twierdzenia spektralnego dla samosprzężonych liniowych operatorów zwartych. W końcowej części rozdziału autor przedstawia analityczne wyliczenia wartości i funkcji własnych dla kwadratu jednostkowego i koła o promieniu jeden.

Rozdział trzeci zatytułowany "Metoda Elementów Skończonych" zawiera opis metody elementów skończonych zaimplementowany w pakiecie PDE Toolbox programu Matlab. Ponieważ metoda elementów skończonych jest bardzo bogata w wyniki i zróżnicowana, dlatego autor ograniczają się jedynie do opisu rozwiązania uogólnionego równania eliptycznego aby następnie opisać rozwiązanie docelowego problemu własnego. Najpierw pokazuję jak z ogólnego równania eliptycznego przechodzimy do słabej (wariacyjnej) postaci równania eliptycznego. Otrzymane równanie zapisujemy przy pomocy bazy ortonormalnej, dzięki czemu sprowadzamy rozwiązanie problemu ciągłego do rozwiązania problemu dyskretnego (skończona ilość równań liniowych).

Rozdział czwarty zatytułowany "Wyniki badań podstawowych obszarów geometrycznych" zawiera opis wyników moich doświadczeń numerycznych. Na początku rozdziału opisujemy algorytm i metodę wykonywania pomiarów. Następnie opisuję wyniki i podaję przykłady lokalizowania obszarów z uszkodzeniem przy użyciu map izochorowych dla obszarów jakimi są kwadrat, koło i elipsa. Dla obszarów geometrycznych jakimi są trójkąt równoboczny, równoramienny i prostokątny przedstawiłem metodę identyfikacji wizualnej obszarów z uszkodzeniem.

Rozdział piąty zatytułowany "Analiza widma operatora Laplace'a dla kwadratów o bokach 1, 2, 3 z uszkodzeniem wewnętrznym" zawiera analizę widma operatora Laplace'a dla uszkodzonego obszaru geometrycznego jakim są kwadraty o wymiarach $[0,1] \times [0,1], [0,2] \times [0,2]$ i $[0,3] \times [0,3]$. W rozdziale tym odpowiadamy na pytania dotyczące podobieństwa między poszczególnymi widmami. Zastanawiam się czy istnieje zależność między kształtem map izochorowych i powierzchni trójwymiarowych z długością boku kwadratów. Kolejne pytanie na jakie odpowiadam jest symetria widma dla poszczególnych kwadratów.

Rozdział szósty zatytułowany "Porównanie obrazów numerycznego widma operatora Laplace'a dla kół o promieniach 1 i 2 z uszkodzeniem wewnętrznym" zawiera porównanie kolorowych map izochorowych i powierzchni trójwymiarowych kół o promieniach 1 i 2. Porównuję między sobą mapy wartości

najmniejszych λ_{min} i wartości największych λ_{max} wartości własnych. Szukam zależności między obrazami a długością promienia. Badam właściwości symetrii i regularności dla poszczególnych map.

Rozdział siódmy zatytułowany "Podsumowanie" jest zebraniem i opisaniem osiągniętych wyników w poniższej rozprawie doktorskiej.

Teza pracy

Możliwe jest wykrywanie i lokalizacja położenia uszkodzenia (nieciągłości) w obszarach geometrycznych takich jak kwadrat, koło, elipsa, trójkąty równoboczny, równoramienny i trójkąt prostokątny z wykorzystaniem widma operatora Laplace'a jako szczególnego przykładu operatora eliptycznego.

Rozdział 2

Teoria spektralna

2.1 Definicje i twierdzenia przestrzeni Hilberta, Sobolewa oraz przestrzeni L^p

Definicja 1 *Ciało* [29](*str.13-14*)

Ciało K to struktura algebraiczna $(K, +, \cdot, 1, 0)$ taka, że zbiór K zawiera co najmniej dwa elementy oznaczane symbolami 0 oraz 1, $(K, +, \cdot, 1, 0)$ jest pierścieniem przemiennym, to znaczy + $i \cdot są$ działaniami w zbiorze K, nazywanymi odpowiednio dodawaniem i mnożeniem spełniającymi warunki:

- 1. $\forall_{a,b,c\in K} a + (b+c) = (a+b) + c$,
- $2. \forall_{a \in K} a + 0 = a,$
- 3. $\forall_{a \in K} \exists_{b \in K} a + b = 0$,
- 4. $\forall_{a,b\in K} a + b = b + a;$
- 5. $\forall_{a,b,c\in K} a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$
- $6. \forall_{a \in K} a \cdot 1 = a,$
- $\gamma \cdot \forall_{a,b,c \in K} a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$

 $8.\forall_{a,b\in K} a \cdot b = b \cdot a.$

9. Każdy niezerowy element jest odwracalny, tzn.: $\forall_{a \in K \setminus \{0\}} \exists_{b \in K} a \cdot b = 1.$

Element 1 nazywa się jedynką lub jednością i jest on elementem neutralnym mnożenia, 0 jest natomiast elementem neutralnym dodawania.

Definicja 2 Przestrzeń liniowa [29](str.182)Niech $(K, +, \cdot, 1, 0)$ będzie ciałem. Przestrzenią liniową bądź wektorową nad ciałem K nazywa się zbiór X z dwoma działaniami dwuargumentowymi: dodawaniem wektorów: $X \times X \to X$ oznaczanym x+y, gdzie $x, y \in X$ i mnożeniem przez skalar: $K \times X \to X$ oznaczanym ax, gdzie $a \in K$ oraz $x \in X$, które spełniają poniższe aksjomaty.

1. Dodawanie wektorów jest łączne: $\forall x, y, z \in X \text{ zachodzi } x+(y+z) = (x+y)+z.$

2. Dodawanie wektorów jest przemienne: $\forall x, y \in X \text{ jest } x+y = x+y.$

3. Dodawanie wektorów ma element neutralny: $\exists 0 \in X$, nazywany wektorem zerowym, że x + 0 = x dla dowolnego $x \in X$.

4. Dodawanie wektorów ma elementy przeciwne: $\forall x \in X \exists y \in X, nazywany wektorem przeciwnym do x, taki, że x + y = 0.$

5. Mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania wektorów: $\forall a \in K \text{ oraz } \forall x, y \in X \text{ jest } a(x+y) = ax+ay.$

6. Mnożenie przez wektor jest rozdzielne względem dodawania skalarów: $\forall a, b \in K \text{ oraz } \forall x \in X \text{ zachodzi } (a+b)x = ax+bx.$

7. Mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem skalarów: $\forall a, b \in K \text{ oraz } \forall x \in X \text{ jest } a(bx) = (a \cdot b)x.$

8. Mnożenie przez skalar ma element neutralny: $\forall x \in X \text{ jest } 1x = x, \text{ gdzie } 1 \text{ oznacza element neutralny mnożenia } w X.$

Definicja 3 Iloczyn skalarny [40](str.129)

Niech dana będzie przestrzeń liniowa X. Załóżmy, że każdej parze elementów $x, y \in X$ została przyporządkowana liczba $\langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ (lub \mathbb{R}), przy czym przyporządkowanie to spełnia warunki:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ 2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ 3. $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ i $\langle 0, 0 \rangle = 0$

Liczbę $\langle x, y \rangle$ nazywamy iloczynem skalarnym elementów x, y.

Definicja 4 Przestrzeń metryczna [29](str.43)

Pare(X, d) nazywamy przestrzenią metryczną, jeżeli odwzorowanie d spełnia następujące warunki:

 $\begin{array}{ll} 1. \ \forall x, y \in X & (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y) \\ 2. \ \forall x, y \in X & d(x,y) = d(y,x) & symetria \\ 3. \ \forall x, y, z \in X & d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) & warunek \ trójkąta \end{array}$

Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to odwzorowanie d nazywać będziemy metryką lub odległością w X.

Definicja 5 Norma [29] (str. 188)

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem K liczb rzeczywistych bądź zespolonych. Odwzorowanie $\|\cdot\|: X \to [0, \infty)$ nazywa się normą w przestrzeni X, jeśli dla wszystkich elementów $x, y \in X$ i skalarów $\alpha \in K$ spełnia następujące warunki:

1. Niezdegenerowania

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \tag{2.1}$$

2. Dodatniej jednorodności

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|; \tag{2.2}$$

3. Nierówności trójkąta (podaddytywności)

$$||x+y|| \le ||x|| + ||y||. \tag{2.3}$$

Przestrzeń X z określoną normą $\|\cdot\|$ nazywa się przestrzenią unormowaną.

Definicja 6 Norma indukowana przez iloczyn skalarny [40] (str.129) Jeżeli $\langle x, y \rangle$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej X, to wzór

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle} \tag{2.4}$$

określa normę w przestrzeni X.

Definicja 7 Przestrzeń unitarna[51](str.88) Zbiór X nazywamy przestrzenią unitarną, jeżeli

X jest przestrzenią liniową,
 w X określony jest iloczyn skalarny ⟨x, y⟩,
 w X zdefiniowana jest norma

Definicja 8 Macierz Hermitowska

Macierzą Hermitowską albo samosprzężoną nazywamy macierz kwadratową $A = (a_{ij})$ równa swojemu sprzężeniu hermitowskiemu, tj. macierz spełniająca warunek $(a_{ij}) = (\overline{a_{ji}})$.

W przypadku macierzy o wyrazach rzeczywistych, macierze hermitowskie to po prostu macierze symetryczne. Nieskończenie wymiarowym uogólnieniem pojęcia macierzy hermitowskiej jest pojęcie operatora samosprzężonego.

Definicja 9 Przestrzeń Hilberta [40] (str. 128)

X jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią unitarną zupełną (zupełność oznacza, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu ma granicę należącą do tej przestrzeni).

Definicja 10 Ortogonalność elementów przestrzeni X [40](str.131) Elementy $x, y \in X$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle x, y \rangle = 0$ (oznaczamy $x \perp y$).

Definicja 11 Dopełnienie ortogonalne [40] (str.148)

Dopełnienie ortogonalne podzbioru A przestrzeni X z określonym iloczynem skalarnym jest to zbiór wszystkich elementów w przestrzeni X, które są ortogonalne do każdego elementu zbioru A. Symbolicznie:

$$A^{\perp} := \left\{ x \in X : \forall y \in A \ \langle x, y \rangle = 0 \right\}.$$

$$(2.5)$$

Twierdzenie 1 Własności dopełnienia ortogonalnego [40] (str.149) Dopełnienie ortogonalne podzbioru przestrzeni Hilberta jest zbiorem domkniętym. W przestrzeni Hilberta X dwukrotne złożenie dopełnienia ortogonalnego dla danego zbioru $A \subseteq X$ jest domknięciem powłoki liniowej, tj. $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\lim} A$

Twierdzenie 2 O rzucie ortogonalnym [40](str.146)

Niech X będzie przestrzenią Hilberta, zaś $C \subseteq X$ będzie jej domkniętą podprzestrzenią liniową. Wówczas

$$X = C \oplus C^{\perp}, \tag{2.6}$$

 $gdzie \oplus oznacza \ (wewnętrzną) \ sumę \ prostą, \ a \ C^{\perp} \ to \ dopełnienie \ ortogonalne \ podprzestrzeni \ C.$

Definicja 12 Układ ortogonalny [40] (str.152) Układem ortogonalnym w przestrzeni Hilberta X nazywamy zbiór $Z \subset X$ taki, że dla każdego $x, y \in Z, x \neq y$ zachodzi $\langle x, y \rangle = 0$.

Definicja 13 Układ ortonormalny [40] (str.152) Układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X nazywamy układ ortogonalny $Z \subset X$ taki, że dla każdego $x \in Z$ zachodzi ||x|| = 1

Twierdzenie 3 O układzie ortonormalnym [40](str.157-159)

Niech (a_k) będzie dowolnym ciągiem liniowym niezależnych elementów przestrzeni Hilberta X. Istnieje wtedy w przestrzeni X układ ortonormalny (e_k) taki, że

$$lin(e_1, e_2, ..., e_m) = lin(a_1, a_2, ..., a_m)$$
 $m = 1, 2, ...$

gdzie $lin(x_1, x_2, ..., x_m)$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich kombinacji liniowych elementów $x_1, x_2, ..., x_m$.

Dla dowodu wystarczy zastosować poniższą procedurę ortonormalizacji

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, (2.7)$$

$$e_2 = \frac{x_1}{\|x_2\|}, \quad gdzie \quad x_2 = a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle e_1$$
 (2.8)

$$e_m = \frac{x_m}{\|x_m\|}, \quad gdzie \quad x_m = a_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle a_2, e_1 \rangle e_1$$
 (2.9)

z której wynika, że (e_k) jest układem ortonormalnym spełniającym tezę twierdzenia.

Definicja 14 Definicja σ -ciała [33](str.9)

Niech X będzie ustaloną przestrzenią. Rodzinę \mathcal{F} zbiorów przestrzeni X nazywa się σ -ciałem lub σ -algebrą tej przestrzeni, jeżeli:

- 1. Zbiór pusty należy do \mathcal{F} : $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- 2. Dopełnienie zbioru należącego do \mathcal{F} należy do \mathcal{F} :

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$$

3. Suma przeliczalnie wielu zbiorów należących do \mathcal{F} należy do \mathcal{F} :

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Zbiory należące do σ -ciała \mathcal{F} nazywa się zbiorami \mathcal{F} -mierzalnymi lub krótko: mierzalnymi (jeśli σ -ciało jest ustalone). Parę (X, \mathcal{F}) złożoną z przestrzeni X i określonego na nim σ -ciała \mathcal{F} nazywa się przestrzenią mierzalną.

Definicja 15 Przestrzeń mierzalna [33] (str.336) Niech \mathcal{F} będzie σ -ciałem podzbiorów zbioru Ω . Funkcję

$$\mu\colon \mathcal{F}\to [0,\infty]$$

nazywamy miarą, gdy

1. $\mu(\varnothing) = 0$ 2. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

dla każdej rodziny zbiorów parami rozłącznych $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ nazywamy przestrzenią z miarą.

Definicja 16 Przestrzeń L^p [40] (str. 62-63) Niech p > 0 będzie liczbą rzeczywistą oraz niech (Ω, F, μ) będzie przestrzenią z miarą σ -skończoną. Niech $L(\mu)$ będzie zbiorem klas abstrakcji relacji

równoważności w rodzinie wszystkich funkcji mierzalnych na Ω względem relacji równoważności danej warunkiem $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ jest μ -miary zero. Zbiór

$$L^{p}(\mu) = \{ f \in L(\mu) \colon \int_{\Omega} |f(x)|^{p} \mu(dx) < \infty \}$$

ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej.

Definicja 17 Słaba pochodna [60] (str. 71)

Niech funkcje u, v będą lokalnie całkowalne w zbiorze Ω oraz niech α będzie wielowskaźnikiem. Mówimy, że funkcja v jest α -tą słabą pochodną funkcji u wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx$$

dla każdej funkcji $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, gdzie $C_c^{\infty}(\Omega)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych w Ω ze zwartym nośnikiem zawartym w Ω . Jeśli v jest α -tą słabą pochodną funkcji u, to zapisujemy to następująco v = $D^{\alpha}u$. Ponadto symbol $D^{\alpha}\phi$ oznacza pochodną cząstkową postaci

$$D^{\alpha}\phi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}\phi.$$

Definicja 18 Przestrzeń Sobolewa [60] (str.97) Przestrzenią Sobolewa $W^{m,p}(\Omega)$ nazywamy zbiór

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}f \in L^p(\Omega) \quad dla \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m \},\$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ jest wielowskaźnikiem spełniającym warunek

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant m,$$

oraz symbol $D^{\alpha}u$ oznacza słabą pochodną funkcji u rzędu α .

Twierdzenie 4 Iloczyn skalarny [60] (str.97)

Przestrzeń $H^m(\Omega)$ jest zupełna, jest zatem przestrzenią Hilberta. Funkcjonał $\parallel f \parallel_{m,2}$ określa normę w $H^m(\Omega)$, zaś iloczyn skalarny zadany jest wzorem

$$\langle f,g \rangle = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \int_{\Omega} D^{\alpha} f \overline{D^{\alpha} g} dx$$

Definicja 19 Przestrzeń Banacha [40] (str. 58-59)

Przestrzeń Banacha to przestrzeń unormowana X, w której metryka wyznaczona przez normę, tj. metryka d dana wzorem

$$d(x,y) = ||x - y|| \quad (x, y \in X),$$

jest zupełna. Zupełność metryki oznacza, że każdy ciąg Cauchy'ego elementów przestrzeni X jest zbieżny do pewnego elementu przestrzeni X.

2.2 Definicje i własności liniowych operatorów samosprzężonych i zwartych. Twierdzenie spektralne

Na potrzeby niniejszej rozprawy ogólną postać operatora różniczkowego możemy zapisać jak następuje

$$A = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D^i(a_{ij} D^j), \qquad (2.10)$$

gdzie *i* oraz *j* są wielowskaźnikami, $a_{ij} \in C^{|i|}(\Omega)$. Niech

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=(1,0), \ j=(1,0) \text{ oraz } i=(0,1), \ j=(0,1) \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$
(2.11)

Jeżeli rozpatrzymy przypadek funkcji dwóch zmiennych, tzn. $u = u(x_1, x_2)$ i podstawimy za k = 1, to otrzymamy ujemny operator Laplace'a postaci

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -\bigtriangleup u \tag{2.12}$$

Szczególną klasą operatorów, jaka nas interesuje, są operatory eliptyczne. Poniżej podamy definicję operatora eliptycznego.

Definicja 20 Operator eliptyczny[51](str.103)

Mówimy, że operator A określony powyższą definicją jest eliptyczny w punkcie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego układu $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \neq 0$ zachodzi

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x)\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j \neq 0,$$

 $gdzie \ \widehat{\xi_i} = \xi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{i_n}, \quad \widehat{\xi_j} = \xi_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{j_n}.$

Operator Laplace'a jest eliptyczny w dowolnym obszarze, ponieważ

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x)\widehat{\xi}_i\widehat{\xi}_j = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |\xi|^2.$$

Definicja 21 Operator liniowy [40] (str.82-83) Niech E, F będą przestrzeniami liniowymi. Odwzorowanie A: $E \rightarrow F$ jest operatorem liniowym jeżeli dla każdego $x, y \in E$ i dla każdego $\alpha \in R$

$$A(x + y) = A(x) + A(y),$$
$$A(\alpha x) = \alpha A(x).$$

Definicja 22 Operator ograniczony [40] (str.91)

Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Operator $T: X \to Y$ nazywa się operatorem ograniczonym jeżeli istnieje pewna liczba nieujemna C, taka że dla każdego x należącego do X spełniony jest warunek

$$||Tx||_Y \leqslant C||x||_X$$

Definicja 23 Rezolwenta operatora [40] (str.370)

Niech H będzie przestrzenią Hilberta i B(H) zbiorem operatorów ograniczonych w H. Zbiorem rezolwentowym operatora $A \in B(H)$ nazywamy zbiór

 $rs(A) := \{ z \in \mathbb{C} : (A - zId_H) \text{ jest odwracalny } w B(H) \}.$

Definicja 24 Widmo operatora [40](str.371)

Widmem (spektrum) sp(A) operatora A nazywamy dopełnienie zbioru rs(A)w \mathbb{C}

$$sp(A) = \mathbb{C} \setminus rs(A).$$

Definicja 25 Wartość własna operatora, promień spektralny [40] (str.371,378) Element widma λ nazywamy wartością własną, jeżeli $\lambda Id_H - A$ ma nietrywialne jądro. Zbiór wartości własnych nazywamy widmem punktowym (czysto punktowym) i oznaczamy spp(A). Ponieważ zbiór operatorów odwracalnych jest otwarty w B(H), zbiór rezolwentowy jest otwarty a spektrum jest zbiorem domkniętym. Liczbę

$$sr(A) = \sup_{z \in sp(A)} |z|$$

nazywamy promieniem spektralnym operatora A

Lemat. Jeżeli ciąg liczbowy (c_n) spełnia relacje $c_n + c_m > c_{n+m}$, to ciąg $\left(\frac{c_n}{n}\right)$ jest zbieżny i lim $\frac{c_n}{n} = \inf \frac{c_n}{n}$.

Twierdzenie 5 Formula Gelfanda-Beurlinga [24](str.11) Granica $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ istnieje i jest równa sr(A).

Dowód

Połóżmy $c_n = \log ||A^n||.$ Dla tak określonego ciągu mamy

 $c_n + c_m = \log ||A^n|| + \log ||A^m|| = \log(||A^n||||A^m||) \ge \log ||A^{m+n}|| = c_{m+n}.$

Z lematu wynika istnienie granicy $\lim \frac{c_n}{n} = \lim \log(||A^n||)^{\frac{1}{n}}$ i stąd istnienie granicy $\lim ||A^n||^{\frac{1}{n}}$. Oznaczmy tą granicę przez r. Z kryterium Cauchy'ego szereg $\sum z^{-1-n}A^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla |z| > r i jego suma jest równa $(z-A)^{-1}$. Zatem $z \in rs(A)$ jeśli $|z| > \lim ||A^n||^{\frac{1}{n}}$, czyli

$$sr(A) \leq \lim ||A^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Niech teraz |z| > sr(A). Rezolwenta $z \mapsto (z-A)^{-1}$ jest funkcją analityczną na swojej dziedzinie, czyli na rs(A), zatem dla dowolnego funkcjonału liniowego i ciągłego φ funkcja liczbowa $rs(A) \in z \mapsto \varphi((z-A)^{-1})$ jest holomorficzna, więc ma rozwinięcie Laurenta w pierścieniu |z| > sr(A). W pierścieniu |z| > ||A|| rozwinięciem Laurenta rezolwenty jest szereg $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}A^k$, więc $\varphi((z-A)^{-1})$ ma w tym pierścieniu rozwinięcie $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}\varphi(A^k)$. Z jednoznaczności rozwinięcia Laurenta jest to też rozwiniecie w pierścieniu |z| > sr(A). Ze zbieżności szeregu Laurenta wynika, że ciąg $(z^{-k}\varphi(A^k))$ jest ograniczony dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego φ . Z twierdzenia Banacha-Steinhausa ciąg $(z^{-k}A^k)$ jest też ograniczony w normie, więc istnieje M takie, że $|z^{-k}|||A^k|| \leq M$. Stąd $||A^k|| \leq M|z|^k$, $||A^k||_k^{\frac{1}{k}} \leq M^{\frac{1}{k}}|z| \to |z|$ i lim $||A^n||^{\frac{1}{n}} \leq |z|$. Jest tak dla każdego z > sr(A), więc

$$sr(A) \ge \lim ||A^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Definicja 26 Operator sprzężony [40](str.196)Operator liniowy $T^*: H \to H$ nazywany jest sprzężonym do ograniczonego operatora liniowego $T: H \to H$, gdy

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$
 dla wszystkich $x, y \in H$.

Definicja 27 Operator samosprzężony [40](str.202)

Ograniczony operator liniowy $T: H \rightarrow H$ nazywany jest samosprzężonym, gdy jest równy swojemu sprzężeniu, tj.

$$T = T^*$$

co jest równoważne stwierdzeniu

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$
 dla wszystkich $x, y \in H$.

Twierdzenie 6 [64](str.2) Jezeli A jest operatorem samosprzężonym, to

$$||A|| = \sup_{||v|| \le 1} |\langle v, Av \rangle| = \sup_{||v||=1} |\langle v, Av \rangle|.$$

Twierdzenie 7 [64](str.2)

Dla każdego operatora A, operator A^*A jest dodatni i $||A^*A|| = ||A||^2$.

Dowód.

Z równosci $\langle v|A^*Av\rangle=\langle Av|Av\rangle=||Av||^2$ mamy dodatniość, więc i samosprzężoność $A^*A.$ Z Twierdzenia 6

$$||A^*A|| = \sup_{||v||=1} \langle v|A^*Av \rangle = \sup_{||v||=1} \langle Av|Av \rangle = \sup_{||v||=1} ||Av||^2 = \left(\sup_{||v||=1} ||Av||\right)^2 = ||A||^2$$

Twierdzenie 8 [64](str.2)

Dla operatora samosprzężonego norma jest równa promieniowi spektralnemu ||A|| = sr(A).

Dowód.

Z poprzedniego twierdzenia $||A||^2 = ||A^2||$ i stad $||A^{2m}|| = ||A||^{2m}$. Z formuły Gelfanda-Beurlinga dostajemy $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} = ||A||$.

Definicja 28 Operator zwarty [40](str.405-406)

Operator zwarty nazywamy operator liniowy między przestrzeniami Banacha przeprowadzający ograniczone podzbiory dziedziny na warunkowo zwarte podzbiory przeciwdziedziny. Innymi słowy, operator zwarty to operator mający tę własność, że domknięcie obrazu zbioru ograniczonego jest zwarte. Każdy operator zwarty jest automatycznie ograniczony.

Definicja 29 Operator zwarty w przestrzeni Hilberta [40]

W przestrzeniach Hilberta równoważna definicja operatora zwartego jest następująca.

Operator $T: H \to H$ na nieskończonej przestrzeni Hilberta H, nazywamy zwartym jeżeli możemy go zapisać w poniższej formie

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f_n, \cdot \rangle g_n$$

gdzie f_1, f_2, \ldots i g_1, g_2, \ldots są ortonormalnymi zbiorami a ciąg liczb $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jest ciągiem dodatnim dążącym w nieskończoności do 0. Liczby te nazywamy osobliwymi wartościami operatora.

Twierdzenie 9 Alternatywa Fredholma [40] (str.451-452)

Niech $A: X \to X$ będzie zwartym odwzorowaniem przestrzeni Hilberta X w siebie. Możliwe są dwie, wykluczające się sytuacje

(1) dla każdego $g \in X$ istnieje rozwiązanie równania (Id - A)f = g, (2) równanie jednorodne (Id - A)f = 0 ma nietrywialne rozwiązanie.

Twierdzenie 10 [64](str.3)

Jeżeli $A \in B(H)$ jest zwarty, to każde $0 \neq \lambda \in sp(A)$ jest wartością własną.

Dowód.

Istotnie, jeżeli A jest zwarty i $0 \neq \lambda$, to z alternatywy Fredholma wynika, że $\lambda \in rs(A)$ lub λ jest wartością własną.

Twierdzenie 11 [64](str.3) Jeżeli A jest samosprzężony i zwarty, to ||A|| lub -||A|| jest wartością własną.

Dowód.

Ajest s.s., więcsr(A) = ||A||, czyli ||A|| lub ||A|| należy do sp(A). Z Twierdzenia 10 wynika teza.

Badanie widma operatora Laplace'a opieram o wyniki teorii spektralnej, w szczególności twierdzenia spektralnego. Dlatego treść i dowód twierdzenia spektralnego podaję na następnych stronach.

Twierdzenie 12 Twierdzenie Spektralne [59] (str. 12-13)

Niech T będzie zwartym, samosprzężonym operatorem liniowym. Wtedy istnieje układ ortonormalnych wektorów u_1, u_2, u_3, \ldots bedących wektorami własnymi operatora T i odpowiadające im wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ dla których spełnione są nierówności

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \dots$$

oraz zachodzi

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k \qquad \forall x \in H.$$

Ponadto jeżeli ciąg wartości własnych (λ_n) jest ciągiem nieskończonym, to $\lambda_n \to 0$ gdy $n \to \infty$.

Dowód twierdzenia spektralnego.

Krok 1. Konstrukcja wektorów własnych.

W celu konstrukcji wektorów własnych i wartości własnych skorzystamy z Twierdzenia 11. Niech $H_1 = H$ i $T_1 = T$. Wtedy stosując Twierdzenie 11 istnieje wartość własne λ_1 i odpowiadający jej wektor własny u_1 operatora T_1 takie, że $||u_1|| = 1$ i $|\lambda_1| = ||T_1||$. Ponieważ span $\{u_1\}$ jest domkniętą podprzestrzenia H_1 dlatego na podstawie Twierdzenia 2 (O rzucie ortogonalnym) mamy $H_1 = \operatorname{span}\{u_1\} \oplus \operatorname{span}\{u_1\}^{\perp}$. Niech $H_2 = \operatorname{span}\{u_1\}^{\perp}$. Przestrzeń H_2 jest domkniętą podprzestrzenią H_1 oraz $T(H_1) \subseteq H_2$. Niech $T_2 = T_1|_{H_2}$. Wtedy T_2 jest zwartym samosprzężonym operatorem w $B(H_2)$. Zakładamy, że $T_2 \neq 0$. Wtedy jeszcze raz na podstawie Twierdzenia 11 istnieje wartość własna λ_2 taka, że $\lambda_2 = ||T_2||$ i odpowiadający jej wektor własny u_2 i $||u_2|| = 1$. Ponieważ T_2 jest obcięciem operatora T_1 więc $|\lambda_2| = ||T_2|| \leq ||T_1|| = |\lambda_1|$. Oczywiście wektory własne u_1 i u_2 są ortonormalne, co wynika z ich konstrukcji. Niech $H_3 = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}^{\perp}$. Oczywiście $H_3 \subseteq H_2$ oraz $T(H_3) \subseteq H_3$. Operator $T_3 = T|_{H_3}$ jest zwarty i samosprzężony. Stosując po raz kolejny Twierdzenie 11 istnieje wartość własna λ_3 taka, że $|\lambda_3| = ||T_3||$ i odpowiadający mu wektor własny $||u_3|| = 1$. $|\lambda_3| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Procedura ta albo kończy się dla pewnego naturalnego n z wynikiem $T_n = 0$ albo istnieje przeliczalny ciąg wartości własnych λ_n i odpowiadających im wektorów własnych u_n , $||u_n|| = 1$ oraz zachodzi $|\lambda_n| = ||T_n||$. Ponadto dla każdego n mamy $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$.

Krok 2. Jeżeli (λ_n) jest nieskończonym ciągiem, to $\lambda_n \to 0$.

Dowód przeprowadzę nie w
prost. Załóżmy, że $\lambda_n \not\rightarrow 0$. Wtedy istniej
e $\epsilon > 0$ taki, że $|\lambda_n| \ge 0$ dla nieskończenie wiel
un. Jeżeli $n \neq m$, to

$$||Tu_n - Tu_m||^2 = ||\lambda_n u_n - \lambda_m u_m||^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 > \epsilon^2.$$

A to pokazuje, że dowolny ciąg Cauchy'ego (Tu_n) nie ma granicy. Co jest oczywiście sprzeczne z założeniem o zupełności operatora T.

Krok 3. Reprezentacja operatora T.

Rozważymy dwa przypadki. Pierwszy dla $T_n = 0$ od pewnego n. Niech $x_n = x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$. Wtedy $x_n \perp u_i$ dla każdego $1 \leq i \leq n$ oraz zachodzą równości

$$0 = T_n x_n = T x - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k.$$

I stąd już bezpośrednio wynika równość

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k.$$

Przypadek drugi. $T_n \neq 0$ dla nieskończenie wielu n.

Dla dowolnego $x \in H$ zachodzi poniższe

$$||Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k|| = ||T_n x_n|| \le ||T_n||| ||x_n|| = |\lambda_n|||x_n|| \le |\lambda_n|||x|| \to 0.$$

Czyli

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k.$$

Co kończy dowód twierdzenia spektralnego.

2.3 Zagadnienie własne dla operatora Laplace'a

Operator T odwrotny do operatora Laplace'a definiujemy następująco. Rozpatrzmy zagadnienie własne dla równania Poissona z zerowymi warunkami brzegowymi, tj.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u(x) = 0, & x \in \partial \Omega \end{cases}$$
(2.13)

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną operatora Laplace'a, a funkcja $u(x) \neq 0$ funkcją własną. W języku przestrzeni Sobolewa możemy napisać, że $u \in W_0^{1,2}$. Zdefiniujmy operator:

$$T: L^2(\Omega) \to W^{1,2}_0(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$$
(2.14)

następująco:

$$T(f) = u \Leftrightarrow -\Delta u = f \tag{2.15}$$

tj. u jest słabym rozwiązaniem równania Poissona.

W moich rozważaniach twierdzenie spektralne stosuję dla operatora T, który jest operatorem odwrotnym do operatora Laplace'a. Wtedy wartości własne rozważanego problemu układają się w ciąg niemalejący

$$\left|\frac{1}{\lambda_{1}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\lambda_{2}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\lambda_{3}}\right| \leqslant \dots$$
(2.16)

Analityczne wyliczenie funkcji i wartości własnych operatora Laplace'a dla kwadrata jednostkowego.

Równanie własne dla operatora Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta [14] ma postać

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\lambda u(x,y) & \text{w } [0,1]x[0,1] \\ u(x,y) = 0 & \text{na } \partial([0,1]x[0,1]) . \end{cases}$$
(2.17)

Równanie rozwiążę za pomocą rozdzielenia zmiennych. Ogólna postać rozwiązania ma postać iloczynu dwóch funkcji różnych zmiennych u(x,y) = h(x)w(y). Po dwukrotnym zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$h''w + w''h = -\lambda hw. \tag{2.18}$$

Po podzieleniu obustronnie przez hw otrzymamy

$$\frac{h''}{h} + \frac{w''}{w} = -\lambda. \tag{2.19}$$

Ponieważ λ jest liczbą a funkcje hiwsą funkcjami różnych zmiennych, dlatego powyższe równanie możemy zapisać równoważnie jako dwa równania

$$\frac{h''}{h} = -\gamma \qquad i \qquad \frac{w''}{w} = -\kappa \tag{2.20}$$

Ogólne rozwiązania powyższych równań mają postać

$$h(x) = a\sin(\sqrt{\gamma}x) + b\cos(\sqrt{\gamma}x), \qquad (2.21)$$

$$w(y) = c\sin(\sqrt{\kappa}y) + d\cos(\sqrt{\kappa}y), \qquad (2.22)$$

gdzie a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi.

Po uwzględnieniu warunku brzegowego funkcje własne i wartości własne są postaci

$$u_{l,m}(x,y) = \sin(l\pi x)\sin(m\pi y),$$
 (2.23)

$$\lambda_{l,m} = \pi^2 (l^2 + m^2) \tag{2.24}$$

gdzie $l, m = 1, 2, 3, \dots$

Pięć pierwszych różnych wartości własnych to następujące liczby:

$$\lambda_{1,1} = 19.72, \quad \lambda_{1,2} = 49.30, \quad \lambda_{2,2} = 78.88, \quad \lambda_{1,3} = 98.60, \quad \lambda_{2,3} = 128.18.$$

Analityczne wyliczenie funkcji i wartości własnych operatora Laplace'a dla koła jednostkowego.

Równanie własne dla operatora Lapplacea'a w kole jednostkowym [14] ma następującą postać

$$\Delta \nu = \frac{\partial^2 \nu(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu(x, y)}{\partial y^2} = -\lambda \nu(x, y)$$
(2.25)

z warunkiem brzegowym $\nu(x, y) = 0$ dla (x, y) leżących na okręgu jednostkowym. Innymi słowy spełniających równanie $x^2 + y^2 = 1$. Wprowadźmy współrzędne biegunowe postaci

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta).$$
 (2.26)

Przy tak określonej zamianie zmiennych problem wartości własnych operatora Laplace'a dla koła jednostkowego we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać

$$\nu_{rr} + \frac{1}{r}\nu_r + \frac{1}{r^2}\nu_{\theta\theta} + \lambda\nu = 0$$
 (2.27)

z warunkiem brzegowym $\nu(1,\theta) = 0$. Powyższe równanie rozwiążemy metodą rozdzielonych zmiennych podstawiając $\nu(r,\theta) = f(r)h(\theta)$, które prowadzi nas do równania

$$\frac{r^2 \left(f''(r) + \frac{1}{r} f' + \lambda f(r) \right)}{f(r)} = -\frac{h''(\theta)}{h(\theta)} = const. = c$$
(2.28)

Ponieważ $\nu(r,\theta)$ i $h(\theta)$ muszą być funkcjami okresowymi ze względu na θ z okresem 2π , dlatego stała c ma wartość $c = n^2$, gdzie n jest nieujemną liczbą naturalną. Funkcję h możemy zapisać w postaci

$$h(\theta) = \cos n\theta + \sin n\theta. \tag{2.29}$$

Dla funkcji f(r) = y otrzymamy równanie różniczkowe postaci

$$r^{2}y'' + ry' + (r^{2}\lambda - n^{2})y = 0.$$
(2.30)

Problemem jaki nas interesuje jest znalezienie wartości własnej λ dla której istnieje rozwiązanie powyższego równania dla r = 0 i spełniającego warunek brzegowy f(1) = 0. Dzięki przekształceniu $r\sqrt{\lambda} = \rho(\lambda \neq 0)$ lub $kr = \rho$ i podstawieniu $\lambda = k^2$ równanie przyjmuje postać

$$\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho} + (1 - \frac{n^2}{\rho^2})y = 0.$$
(2.31)

Równanie (2.31) nazywamy równaniem Bessel'a a jego rozwiązaniami są szeregi potęgowe, które noszą nazwę funkcji Bessel'a n-tego rzędu

$$y(\rho) = J_n(\rho) = \frac{\rho^n}{2^n n!} \left(1 - \frac{\rho^2}{2(2n+2)} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots\right) \quad (2.32)$$

Szukane rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$y_n = J_n(kr) \tag{2.33}$$



Rysunek 2.1: Graficzne przedstawienie funkcji Bessel'a dla n=0,1,2,3,4.

gdzie $k^2=\lambda$ i ponadto stała kmusi spełniać warunek brzegowy $y_n(1)=0$ co sprowadza się do równania

$$J_n(k) = 0 \tag{2.34}$$

Rysunek 2.1 przedstawia przykładowe funkcje Bessel'a dla odpowiednio n = 0, 1, 2, 3, 4.

Ostatecznie szukane wartości własne są miejscami zerowych funkcji Bessel'a podniesionymi do kwadratu. Odnotujmy iż każda funkcja J_n ma przeli-

k	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

Tabela 2.1: Zestawienie pierwszych pięciu miejsc zerowych dla sześciu pierwszych funkcji Bessel'a.

czalną ilość miejsc zerowych, które będziemy odnotowywać przez $k_{n,m}$, (m = 1, 2, 3, ...). Przy użyciu tej notacji możemy zapisać funkcje własne w formie

$$J_n(k_{n,m}, r)(\cos n\theta + \sin n\theta). \tag{2.35}$$

Poniższa tabela przedstawia pięć pierwszych miejsc zerowych dla sześciu pierwszych funkcji Bessel'a.

W tym miejscu chcę zaznaczyć fakt, że widmo operatora Laplace'a jest nieskończone (przeliczalne). W moich badaniach numerycznych korzystam z oprogramowania Matlab PDE toolbox, w którym otrzymuję jedynie kilka pierwszych wartości własnych. Aczkolwiek nie wpływa to na wyniki badań, ponieważ wartości własne pokrywają się ze sobą.

Rozdział 3

Metoda elementów skończonych

Metoda Elementów Skończonych albo Metoda Elementu Skończonego (w skrócie MES, ang. finite element method, w skrócie FEM) – zaawansowana metoda rozwiązywania układów równań różniczkowych, opierająca się na podziale dziedziny (tzw. dyskretyzacja) na skończone elementy, dla których rozwiązanie jest przybliżane przez konkretne funkcje, i przeprowadzaniu faktycznych obliczeń tylko dla węzłów tego podziału. Rozważania zawarte w tym rozdziale opisują metodę elementów skończonych zaimplementowaną w pakiecie PDE Toolbox środowiska Matlab.

3.1 Opis Metody Elementów Skończonych dla Matlab PDE Toolbox

Ogólną postać równania eliptycznego rozwiązywaną przy użyciu Matlab PDE Toolbox [52] możemy zapisać następująco:

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f, \quad \le \Omega$$
(3.1)

gdzie Ω jest ograniczonym obszarem płaszczyzny. Litery c, a, f i nieznane rozwiązanie u są funkcjami zespolonymi określonymi na obszarze Ω . Warunki brzegowe uwzględniające kombinację funkcji u i jej pochodną normalną na brzegu obszaru mogą mieć postać:

i) Warunek Dirichlet'a: hu = r na brzegu $\partial \Omega$.

ii) Uogólniony warunek Neumann'a: $\overrightarrow{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$ na brzegu $\partial\Omega$.

iii) Warunek mieszany (stosowany jedynie do układów równań): kombinacja warunków Dirichlet'a i uogólnionych warunków Neumann'a.

Litery g, q, h, r są funkcjami określonymi na brzegu $\partial \Omega$. Natomiast symbol \overrightarrow{n} oznacza normalny wektor zewnętrzny.

Szukanie przybliżonego rozwiązania eliptycznego równania różniczkowego cząstkowego odbywa się w trzech etapach. Pierwszym jest opisanie geometrii obszaru Ω i warunku brzegowego. W przypadku oprogramowania Matlab można to zrobić interaktywnie używając interfejsu graficznego (pdetool) albo przy pomocy M-pliku. Obydwa sposoby są równie dobre. Następny, drugi etap, to zbudowanie siatki trójkatnej mesh (triangular mesh). Jest ona opisana przez trzy macierze ustalonego formatu zawierające informację o punktach siatki, segmentach granicznych oraz o trójkątach z, których budowana jest siatka. Ostatnim, trzecim etapem, jest dyskretyzacja cząstkowego równania różniczkowego i warunków brzegowych w celu uzyskania układu równań liniowych postaci Ku = F. Nieznany wektor u zawiera zawiera przybliżone rozwiązanie w punktach siatki mesh. Macierz K składa się ze współczynników c, a, h, q. Prawa strona równania czyli macierz F zawiera głównie średnie funkcji f w pobliżu każdego punktu siatki mesh i ograniczeń wynikających z funkcji q. W przypadku oprogramowania Matlab metodę elementów skończonych możemy opisać jednym istotnym zdaniem: Jest to projekcja słabej postaci równania różniczkowego na skończenie wymiarową przestrzeń funkcyjną. Dalsza

Bez straty ogólności rozważymy ogólną postać eliptycznego równania różniczkowego (3.1) z uogólnionym warunkiem brzegowym Neumann'a (*ii*) na całym brzegu obszaru Ω . Jest to możliwe ponieważ brzegowy warunek Dirichlet'a może być opisany przy pomocy ogólnego warunku Neumann'a. W najprostszym przypadku kiedy macierz h jest macierzą jednostkową i podstawiając g = qr a następnie zmierzając $q \to \infty$ otrzymamy warunek Dirichlet'a ponieważ dzieląc przez bardzo duże q zniwelujemy pochodną normalną do 0. Niech u będzie rozwiązaniem równania różniczkowego (3.1). Mnożąc to równanie przez dowolną funkcję testową ν a następnie całkując na zbiorze Ω otrzymamy równość

część opisu będzie składać się z rozwinięcia powyższego zdania.

$$\int_{\Omega} -(\nabla \cdot (c\nabla u))\nu + au\nu dx = \int_{\Omega} f\nu dx.$$
(3.2)

Następnie całkując przez części przy użyciu formuły Green'a równanie (3.2) dostajemy

$$\int_{\Omega} -(c\nabla u) \cdot \nabla \nu + au\nu dx - \int_{\partial\Omega} (c\nabla u) \cdot \nu ds = \int_{\Omega} f\nu dx.$$
(3.3)

Z warunku brzegowego ii) możemy zastąpić całkę po brzegu $\partial \Omega$ jak następuje

$$\int_{\Omega} -(c\nabla u) \cdot \nabla \nu + au\nu dx - \int_{\partial\Omega} (-qu+g)\nu ds = \int_{\Omega} f\nu dx.$$
(3.4)

Teraz możemy problem oryginalny (3.1) zastąpić następującym problemem. Znajdź taką funkcję u aby zachodziło następujące

$$\int_{\Omega} -(c\nabla u) \cdot \nabla \nu + au\nu - f\nu dx - \int_{\partial\Omega} (-qu+g)\nu ds = 0. \quad \forall \nu \quad (3.5)$$

Równanie (3.5) nazywane jest wariacyjną albo słabą formą równania różniczkowego. Oczywiście każde rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego jest również rozwiązaniem problemu wariacyjnego danego równania. Twierdzenie w drugą stronę jest prawdziwe pod pewnymi założeniami o obszarze Ω i współczynnikach funkcji. Rozwiązanie problemu wariacyjnego nazywane jest również słabym rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego.

Rozwiązanie u oraz funkcje testowe ν należą do pewnej przestrzeni funkcyjnej V. Następnie musimy wybrać N_p -wymiarową podprzestrzeń $V_{N_p} \subset V$. Projekcja słabej formy równania różniczkowego na skończoną podprzestrzeń przestrzeni funkcyjnej oznacza tyle, że wymagamy aby rozwiązanie u i funkcja ν leżały w podprzestrzeni V_{N_p} . Rozwiązanie problemu dla podprzestrzeni o skończonym wymiarze sprowadza się teraz do znalezienia takiego elementu przestrzeni V_{N_p} , który leży najbliżej słabego rozwiązania w sensie metryki energi. Zbieżność jest zagwarantowana jeżeli przestrzeń V_{N_p} dązy do V gdy $N_p \to \infty$. Ponieważ operator różniczkowy jest operatorem liniowym dlatego postulujemy iż równanie wariacyjne jest spełnione dla N_p funkcji testowych $\phi_i \in V_{N_p}$ tworzących bazę.

$$\int_{\Omega} (c\nabla u) \cdot \nabla \phi_i + au\phi_i - f\phi_i dx - \int_{\partial\Omega} (-qu+g)\phi_i ds = 0, \quad i = 1, \dots, N_p \quad (3.6)$$

Zapisując funkcję u przy pomocy tej samej bazy podprzestrzeni $V_{{\cal N}_p}$ otrzymamy

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_p} U_j \phi_j(x), \qquad (3.7)$$

a w konsekwencji mamy układ równań

$$\sum_{j=1}^{N_p} \left(\int_{\Omega} (c\nabla\phi_j) \cdot \nabla\phi_i + a\phi_j \phi_i dx + \int_{\partial\Omega} q\phi_j \phi_i ds \right) U_j = \int_{\Omega} f\phi_i dx + \int_{\partial\Omega} g\phi_i ds, \ i = 1, \dots, N_p$$
(3.8)

W dalszej części dla skrócenia opisu będziemy używać poniższej notacji:

$$K_{i,j} = \int_{\Omega} (c \nabla \phi_j) \cdot \nabla \phi_i dx \quad \text{(Macierz sztywności)}$$
$$M_{i,j} = \int_{\Omega} a \phi_j \phi_i dx \quad \text{(Macierz masy)}$$
$$Q_{i,j} = \int_{\partial \Omega} q \phi_j \phi_i ds$$
$$F_i = \int_{\Omega} f \phi_i dx$$
$$G_i = \int_{\partial \Omega} g \phi_i dx$$

i zapiszemy układ równań (3.8) jako

$$(K+M+Q)U = F + G$$

K, M, Q są macierzami o wymiarze $N_p \times N_p$ a F, G są wektorami N_p . Macierze K i M oraz wektor F są generowane przez wewnętrzną funkcję Matlaba o nazwie **assema**, natomiast macierz Q i wektor G generuje funkcja **assemb**. Kiedy operator jest samosprzężony i eliptyczny w sensie matematycznym, macierz K + M + Q staje się symetryczna i dodatnio określona. Wiele ogólnych problemów ma tę własność i w większości z nich możemy sformułować je jako problemy minimalizacji (optymalizacji) czyli znalezienia najlepszego rozwiązania w pewnej klasie rozwiązań. Wtedy dla przypadku równania skalarnego macierze K, M, Q oczywiście są symetryczne. Jeżeli $c(x) \ge \delta > 0$, $a(x) \ge 0$ i $q \ge 0$, to

$$U^{T}(K+M+Q)U = \int_{\Omega} c|\nabla u|^{2} + au^{2} + \int_{\partial\Omega} qu^{2}ds > 0, \quad je\dot{z}eli \ U \neq 0.$$
(3.9)

 $U^{T}(K+M+Q)U$ nazywamy normą energetyczną.

Przestrzeń funkcji testowych możemy wybrać na wiele sposobów. Toolbox jako funkcji testowych używa funkcje ciągłe, które są liniowe na każdym trójkącie siatki mesh. Dzięki liniowości mamy zagwarantowane istnienie całek,
które definiują macierz sztywności K. Projekcja na podprzestrzeń V_{N_P} to nic innego jak liniowa interpolacja, a obliczenie rozwiązania wewnątrz trójkątów siatki określone jest przez ich wierzchołki.

Dogodną bazą przestrzeni V_{N_p} jest zbiór tak zwanych funkcji "namiotowych" ϕ_i . Są one liniowe na każdym trójkącie siatki mesh i przyjmują wartość 0 dla każdego wierzchołka x_j poza wierzchołkiem x_i . Dodatkowa założenie $\phi_i(x_i) = 1$ daje nam bardzo przydatne własności bazy. Mianowicie rozwiązanie $u(x_i)$ możemy zapisać w prostej postaci

$$u(x_i) = \sum_{j=1}^{N_p} U_j \phi_j(x_i) = U_i.$$
(3.10)

Dzięki temu po rozwiązaniu układu równań otrzymamy wartości przybliżonego rozwiązania na wierzchołkach trójkątów. Następną własnością funkcji bazowych ϕ_i jest to, że znikają na wszystkich trójkątach, które nie zawierają wierzchołka x_i . Natychmiastową konsekwencją tej własności jest fakt, iż całki pojawiające się w macierzach $K_{i,j}, M_{i,j}, Q_{i,j}$ i wektorach F_i, G_i obliczane są tylko dla trójkątów zawierających wierzchołek x_i . Co w bardzo dużym stopniu usprawnia obliczenia. Drugą bardzo ważną zaletą tak dobranych funkcji jest to, iż $K_{i,j}$ i $M_{i,j}$ są równe zero chyba, że wierzchołki x_i i x_j są wierzchołkami tego samego trójkąta. Macierze K i M są macierzami rzadkimi (macierz w której większość elementów równa się zero). Ich rzadkość (ilość elementów i ich rozmieszczenie) zależy od porządku wskaźników punktów siatki mesh. Matlab obliczając rozwiązanie na pojedynczym trójkacie siatki mesh (Rysunek 3.1) tworzy tak zwaną macierz lokalną dla tego trójkąta. Jest to macierz o wymiarze 3×3 zawierająca obliczone całki na danym trójkacie. Całki obliczane są przy użyciu reguły punktu pośredniego. Aproksymacja ta jest optymalna ponieważ jest takiego samego rzędu jak liniowa interpolacja poszczególnych kawałków obszaru. Tak utworzone macierze lokalne wstawiane są jako elementy w odpowiednich miejscach do macierzy rzadkiej lub odpowiedniego wektora.

Najprostsze obliczenia są dla partykularnej macierzy masy m

$$m_{i,j} = \int_{\nabla P_1 P_2 P_3} a(P_c)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = a(P_c)\frac{\operatorname{area}(\Delta P_1 P_2 P_3)}{12}(1+\delta_{i,j}), \quad (3.11)$$

gdzie P_c jest środkiem masy trójkąta $\triangle P_1 P_2 P_3$ liczonym ze wzoru

$$P_c = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \tag{3.12}$$



Rysunek 3.1: Lokalny trójkąt o wierzchołkach $P_1P_2P_3$, punkcie pośrednim P_c i punkcie środkowym P_b .

Przykładowe obliczenia macierzy F są następujące

$$f_i = f(P_c) \frac{\operatorname{area}(\triangle P_1 P_2 P_3)}{3} \tag{3.13}$$

Dla lokalnej macierzy sztywności musimy oszacować gradient, dla tych funkcji bazowych, które nie znikają na trójkącie $P_1P_2P_3$. Ponieważ funkcje bazowe są liniowe na trójkącie $P_1P_2P_3$, dlatego gradient jest stały. Oznaczmy funkcje bazowe ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 tak, aby $\phi_i(P_i) = 1$. Jeżeli $P_2 - P_3 = [x_1, y_1]^T$ to wtedy mamy

$$\nabla \phi_1 = \frac{1}{2 \operatorname{area}(\triangle P_1 P_2 P_3)} \begin{bmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$
(3.14)

a po scałkowaniu (c jest macierzą stałą na trójkącie) mamy

$$k_{i,j} = \frac{1}{4area(\Delta P_1 P_2 P_3)} [y_j, -x_j] c(P_c) \begin{bmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$
(3.15)

Jeżeli dwa wierzchołki trójkąta leżą na brzegu obszaru $\partial\Omega$, to są częścią linii stowarzyszonej z warunkiem brzegowym. Jeżeli dwa punkty brzegowe to P_1 i P_2 wtedy mamy

$$Q_{i,j} = q(P_b) \frac{||P_1 - P_2||}{6} (1 + \delta_{i,j}), \qquad i, j = 1, 2$$
(3.16)

oraz

$$G_i = g(P_b) \frac{||P_1 - P_2||}{2}, \qquad i = 1, 2,$$
(3.17)

gdzie P_b jest punktem środkowym między P_1P_2 .

Dla każdego trójkąta wierzchołe
k P_m lokalnego trójkąta odpowiada wskaźnikow
i i_m siatki mesh. Wyliczenia z poszczególnych trójkątów do
dawane są do macierzy w następujący sposób

$$K_{i_m,i_n}t \leftarrow K_{i_m,i_n} + k_{m,n}, \qquad m, n = 1, 2, 3.$$
 (3.18)

Funkcja, która za to odpowiada nosi nazwę **assempde**. Gradienty i pola trójkątów (area) liczone są przez funkcje pdetrg.

3.1.1 Zagadnienie własne

Ogólną postać zagadnienia własnego rozwiązywaną przy użyciu Matlab PDE Toolbox [52] możemy zapisać następująco:

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du, \qquad (3.19)$$

gdzie λ jest nieznaną liczbą zespoloną.

Rozwiązanie numeryczne zagadnienia własnego znajdowane jest przez dyskretyzację jego równania i rozwiązanie uzyskanego w ten sposób algebraicznego problemu własnego. W pierwszym kroku rozważymy dyskretyzację. Zapisując nasze równanie z niewiadomą u w terminologii MES, mnożąc przez funkcję bazową a następnie całkując po obszarze Ω otrzymamy ogólne równanie własne

$$KU = \lambda MU, \tag{3.20}$$

gdzie macierz masy ${\cal M}$ odpowiadająca prawej stronie równania ma postać

$$M_{i,j} = \int_{\Omega} d(x)\phi_j(x)\phi_i(x)dx.$$
(3.21)

Macierze wytrzymałości K i masy M wyliczane są przy użyciu wewnętrznej funkcji Matlaba zwanej *assema* z równań postaci

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = 0, \qquad -\nabla \cdot (0\nabla u) + du = 0.$$

W większości przypadków, kiedy funkcja d(x) jest dodatnia (większa od zera), macierz masy M jest macierzą dodatnio określoną. Ponadto jeżeli funkcja c(x) jest dodatnia i mamy warunek brzegowy Dirichleta, macierz wytrzymałości K jest również macierzą dodatnio określoną.

Ogólny problem własny $KU = \lambda MU$ jest teraz rozwiązywany z pomocą

metody Arnoldi'ego wyznaczania bazy ortogonalnej zastosowanej do przesuniętej i odwróconej macierzy. Algorytm jest restartowany dopóki nie zostaną znalezione wszystkie wartości własne określone dla danego przedziału.

Najpierw przesunięcie μ jest ustalane blisko wartości, gdzie chcemy znaleźć wartość własną. Kiedy obydwie macierze K i M są dodatnio określone, to algorytm przyjmuje $\mu = 0$ jako wartość najbardziej odpowiednią a następnie wybiera najmniejszą wartość własną. W przeciwnym wypadku wybierany jest jakikolwiek punkt z przedziału, w którym szukamy wartości własnych. Następnie odejmuje μM od równania własnego i otrzymuje równanie

$$(K - \mu M)U = (\lambda - \mu)MU. \tag{3.22}$$

Potem mnoży przez odwrotność macierzy przesuniętej i dostaje

$$\frac{1}{\lambda - \mu} U = (K - \mu M)^{-1} M U.$$
(3.23)

To równanie jest już standardowym problemem własnym $AU=\theta U$ z macierzą Arówną

$$A = (K - \mu M)^{-1} M \tag{3.24}$$

i wartościami własnymi

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}, \quad i = 1, ..., n.$$
(3.25)

Wartości własne θ_i przekształ
conej macierzy Aodpowiadają teraz wartości
om własnym

$$\lambda_i = \mu - \frac{1}{\theta_i} \tag{3.26}$$

ogólnego równania własnego macierzy K i M najbliższemu przesunięciu μ . Algorytm Arnoldi'ego oblicza ortonormalna bazę V, gdzie przesunięty i odwrócony operator A jest reprezentowany przez macierz Hessenberga H,

$$AV_j = V_j H_{j,j} + E_j. aga{3.27}$$

Indeksy w powyższej notacji oznaczają, że V_j i E_j mają j kolumn a macierz $H_{j,j}$ ma j wierszy i kolumn. Jeżeli nie używamy indeksów oznacza to, że wektory i macierz są rozmiaru n.

Niektóre wartości własne macierzy Hessenberga $H_{j,j}$ dają niekiedy dobre przybliżenie wartości własnych ogólnego równania własnego macierzy K i

M jeżeli tylko wymiar j bazy V_j wzrasta a coraz mniej wektorów własnych jest ukrytych w macierzy reszty E_j .

Baza V jest budowana przez kolumny v_j w każdym kroku. Pierwszy wektor v_1 jest wybierany losowo spośród rozkładu normalnego n liczb. W j-tym kroku pierwsze j wektorów są już obliczone i tworzą macierz V_j o wymiarze $n \times j$. Następny wektor v_{j+1} jest obliczany przez mnożenie macierzy A i wektora v_j oraz poddanie go działaniu ortogonalizacji wobec wcześniejszych wektorów. Równanie, które opisuje ten proces jest następujące

$$h_{j+1,j}v_{j+1} = Av_j - V_j h_j, (3.28)$$

gdzie wektor kolumnowy h_j zawiera współczynniki Grama-Schmidta, natomiast $h_{j+1,j}$ jest czynnikiem normalizującym dzięki któremu v_{j+1} jest długości jeden. Łącząc powyższe stwierdzenia w całość otrzymamy równanie

$$AV_j = V_j H_{j,j} + v_{j+1} h_{j+1,j} e_j^T, (3.29)$$

gdzie $H_{j,j}$ jest macierzą Hessenberga z wektorami h_j jako kolumny. Drugi czynnik wyrażenia prawej strony równania ma niezerowe elementy jedynie w ostatniej kolumnie a wcześniej znormalizowane czynniki leżą poniżej diagonali macierzy $H_{j,j}$.

Wektory własne i wartości własne macierzy Hessenberga $H_{j,j}$ dają przybliżenie niektórym wektorom własnym i wartościom własnym macierzy operatora A w następujący sposób. Oblicza wartości własne θ_i i wektory własne s_i macierzy $H_{j,j}$

$$H_{j,j}s_i = s_i\theta_i, \qquad i = 1, ..., j.$$
 (3.30)

Wtedy

$$y_i = V_j s_i \tag{3.31}$$

jest przybliżeniem wektora własnego macierzy A a jego reszta to

$$r_i = Ay_i - y_i\theta_i = AV_js_i - V_js_i\theta_i = (AV_j - V_jH_{j,j})s_i = v_{j+1}h_{j+1,j}s_i.$$
 (3.32)

Zeby przybliżenie wartości własnej było dość dobre, reszta musi być mała w odniesieniu do normy dla θ_i . Norma z reszty równa się

$$||r_i|| = |h_{j+1,j}s_i|, (3.33)$$

czyli iloczyn ostatniego elementu subdiagonalnego macierzy Hessenberga i ostatniego elementu jego wektora własnego. Rzadko się zdarza aby $h_{j+1,j}$ było

dostatecznie małe, ale po odpowiednio dużej ilości kroków j zawsze są jakieś wektory własne s_i , którego ostatni element jest wystarczająco mały. Dodajmy jeszcze, że wektor V_{i+1} jest długości jeden. Aby obliczyć normę reszty, nie potrzebujemy obliczać przybliżenia wektora własnego y_i . Musimy jedynie zbadać krótki wektor s_i i oznaczyć te, które mają zbieżne ostatnie składniki. Dla typowego przypadku n może być rzędu 2000, kiedy j rzadko kiedy osiaga 50. Dlatego wszystkie obliczenia które zawierają jedynie macierze i wektory rozmiaru j są o wiele tańsze w obliczeniach niż te, które zawierają wektory o długości n. Takie obliczenia dla wartości własnej i testy dla zbieżności są robione co kilka kroków *j*, dopóki wszystkie przybliżenia wartości własnych wewnątrz szukanego przedziału nie zostaną oznaczone jako zbieżne. Kiedy njest dużo większe niż i takie obliczenia są robione bardzo czesto, natomiast dla mniejszych n dużo rzadziej. Kiedy wszystkie wartości własne wewnątrz przedziału są zbieżne albo kiedy j osiągnęło przypisane maksimum, to zbieżne wektory własne albo bardziej poprawnie wektory Schur'a sa obliczane i wstawiane do przodu bazy V. Następnie algorytm Arnoldi'ego jest restartowany z losowym wektorem jeżeli wszystkie przybliżenia wewnątrz przedziału są oznaczone jako zbieżne albo z najlepszym niezbieżnym przybliżeniem wektora własnego y_i . Przy drugim uruchamianiu algorytmu Arnoldi'ego w każdym j-tym kroku wektor jest ortogonalizowany do wszystkich wektorów w V właczając w to zbieżne wektory Schura otrzymane we wcześniejszym uruchamianiu algorytmu. W ten sposób algorytm jest stosowany do rzutowanej macierzy i odkrywa druga kopie każdej podwójnej wartości własnej jaka może się pojawić. Jeżeli przy drugim uruchomieniu algorytm odkryje jakąkolwiek wartość zbieżną, to następuje trzecie uruchomienie algorytmu. Algorytm jest dopóty uruchamiany dopóki nie pojawi się więcej zbieżnych przybliżonych wartości własnych θ_i . Następnie algorytm sygnalizuje zbieżność. Jeżeli po tych wszystkich uruchomieniach nadal są niezbieżne przybliżenia wartości własnych a ilość maksymalnych kroków jakie miał wykonać algorytm została przekroczona, to algorytm sygnalizuje rozbieżność i wyświetla wszystkie rozwiązania które znalazł.

Jest to strategia heurystyczna, która działa dobrze dla symetrycznych i niesymetrycznych a nawet dla niepełnych problemów własnych. Istnieje mała teoretyczna szansa pominięcia wartości własnych jedynie wtedy, gdy wszystkie wektory startowe, które wybierane są losowo, będą ortogonalne do swoich wektorów własnych. Algorytm restartuje się p-razy, gdzie p jest największą wielokrotnością wartości własnej. Przy każdym kolejnym restartowaniu wyznaczany jest nowy losowo wybrany kierunek poszukiwań. Odnotujmy fakt,

że przesunięta i odwrócona macierz

$$A = (K - \mu M)^{-1} M \tag{3.34}$$

jest potrzebna jedynie po to, aby wykonywać obliczenia na wektorze v_j w algorytmie Arnoldi'ego. Obliczenia te są realizowane przez rozkład na macierze dolnotrójkątnej L i górnotrójkątnej U

$$P(K - \mu M)Q = LU, \tag{3.35}$$

przy użyciu komendy lu (P i Q są macierzami permutacyjnymi, które przemieniają lewą stronę równania na czynniki L i U, które są macierzami rzadkimi i numerycznie stabilnymi). Rozkład na macierze L i U jest realizowany tylko raz na początku obliczeń. Wtedy

$$x = Av_j \tag{3.36}$$

obliczane jest z równania

$$x = QU^{-1}L^{-1}PMv_j. (3.37)$$

Należy jeszcze raz podkreślić, że moje badania opierają się na obliczeniach numerycznych i dlatego otrzymane widmo jest skończone (przeliczalne).

Rozdział 4

Wyniki badań podstawowych obszarów geometrycznych

Niniejszy rozdział zawiera istotne wyniki autora. W tym rozdziale opiszę metodę badawczą jakiej użyłem w trakcie przeprowadzania doświadczeń numerycznych w celu określenia położenia uszkodzenia dla obszarów geometrycznych jakimi są: kwadrat, koło, elipsa, trójkąt równoboczny, trójkąt równoramienny i trójkąt prostokątny oraz przedstawię graficznie otrzymane wyniki. W końcowych częściach podrozdziałów przedstawię przykłady ilustrujące, które pomogą zrozumieć metodę. Badania numeryczne przeprowadzone były w programie Matlab PDE Toolbox. Algorytm uzyskiwania wartości własnych składa się z pięciu kroków.

Algorytm

1. Zadajemy obszar Ω bez uszkodzenia .

2. W zadanym obszarze Ω umieszczamy uszkodzenie.

3. Wybieramy rodzaj równania i jego specyfikację (Eigenmodes, a = 1.0, c = 0.0, d = 1.0).

4. Obszar z uszkodzeniem pokrywamy siatką MES (triangulacja obszaru z uszkodzeniem).

5. Otrzymujemy wartości własne $\lambda_{min}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{max}$.

Algorytm uzyskiwania wartości własnych jest stosowany za każdym razem na nowo dla kolejnego punktu, w którym umieszczane jest uszkodzenie. Na przykład w przypadku kwadrata $[0,1] \times [0,1]$ było 121 punktów pomiarowych. Uszkodzenie (nieciągłość) jest to bardzo małe koło o promieniu r = 0.01.

ROZDZIAŁ 4. WYNIKI BADAŃ PODSTAWOWYCH OBSZARÓW GEOMETRYCZNYCH



Rysunek 4.1: Pokryty siatką mes zadany obszar Ω (kwadrat $[0,1]\times[0,1])$ z uszkodzeniem wewnętrznym.

PDE Specification				
Equation: -div(c*grad(u))+a*u=lambda*d*u			
Type of PDE:	Coefficient	Value		
Elliptic	с	1.0]	
Parabolic	а	0.0]	
Hyperbolic	f	10.0]	
Eigenmodes	d	1.0]	
	ОК		Cancel	

Rysunek 4.2: Wybranie typu równania i jego specyfikacji.

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej



Rysunek 4.3: Graficzne przedstawienie rozwiązania równania własnego dla $\lambda=24.0053.$

Plot Selection			Hille			×
Plot type:	Property:	User	entry:	Plot styl	e:	
Color	u	•		interpol	ated shad.	•
Arrows	-grad(u)	•		proport	ional	•
Deformed mesh	-grad(u)	•				
Height (3-D plot)	u	•		continu	ous	•
Animation	Options					
Plot in x-y grid	Contour plot levels:	20	V PI	ot solution autom	atically	
Show mesh	Colormap: coo	I	▼ Eigen	value:	24.01	-
P	lot	Close		Cance	24.01 50.36 59.84	
		STATISTICS.	The second second	SYST A	85.1	

Rysunek 4.4: Wartości własne równania Laplace'a dla kwadrata $[0, 1] \times [0, 1]$ z uszkodzeniem w punkcie (0.7, 0.4).

47

Pierwszym krokiem jaki wykonujemy jest zadanie (narysowanie) obszaru Ω . Program PDE Toolbox posiada bardzo przyjazny użytkownikowi interfejs. Obszar można narysować przy użyciu kursora albo w bardzo precyzyjny sposób wprowadzić współrzędne wierzchołków w przypadku wielokątów. Natomiast dla koła i tym podobnych figur wprowadzamy środek i promień koła albo odpowiednio inne parametry, które charakteryzują daną figurę geometryczną. Na Rysunku 4.1 przedstawiony jest interfejs PDE Toolbox programu Matlab. Pokazany jest tam pokryty siatką mes obszar Ω , którym jest kwadrat jednostkowy a uszkodzenie umieszczone zostało w punkcie (0.7, 0.4). Na Rysunku 4.2 poniżej mamy wybrany rodzaj równania (Eigenmodes) oraz jego specyfikację czyli wartość współczynników c, a, d w równaniu

$$-div(c * grad(u)) + a * u = lambda * d * u.$$

$$(4.1)$$

Dla zagadnienia własnego operatora Laplace'a współczynniki te mają wartość c = 1, a = 0, d = 1. Czwarty krok, to pokrycie siatką mesh obszaru z uszkodzeniem. Na Rysunku 4.1 pokazany jest pokryty siatką mesh obszar Ω , którym jest kwadrat jednostkowy a uszkodzenie umieszczone zostało w punkcie (0.7, 0.4). Piątym i ostatnim krokiem jest odczytanie wartości własnych odpowiadające danemu uszkodzeniu, które znajdziemy w oknie dialogowym Plot Selection. Rysunek 4.4 pokazuje przykładowe wartości własne dla obszaru Ω jakim jest kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ i uszkodzenia znajdującego się w punkcie (0.7, 0.4). Do stworzenia map izochorowych najmniejszych i największych wartości własnych z otrzymanego pomiaru wybieramy $\lambda_{min} = 24.01$ oraz $\lambda_{max} = 85.1$. Rysunek 4.3 przedstawia rozwiązanie równania własnego dla $\lambda = 24.0053$ i uszkodzeniem w punkcie (0.7, 0.4). W programie Matlab można wygenerować trójwymiarowe przedstawienie rozwiązania z możliwością swobodnego obracania obrazu.

Na następnych stronach zaprezentuję przykłady w jaki sposób należy lokalizować uszkodzenie.

4.1 Kwadrat o wymiarach $[0,1] \times [0,1]$

4.1.1 Opis doświadczenia oraz uzyskanych wyników

Pierwszy obszar jaki został poddany badaniom był to kwadrat jednostkowy, tzn. kwadrat o bokach równych 1 [13]. Problem spektralny dla tak zadanego obszaru zapisujemy w postaci:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\lambda u(x,y) & \text{w} [0,1] \times [0,1] \\ u(x,y) = 0 & \text{na } \partial([0,1] \times [0,1]) . \end{cases}$$
(4.2)

Poniżej, na rysunku 4.5 przedstawiona jest siatka punktów, w których umieszczałem zniekształcenie i dokonywaliśmy pomiaru widma operatora Laplace'a. Do każdego punktu z osobna stosowałem algorytm, który jest opisany na początku obecnego rozdziału.



Rysunek 4.5: Siatka punktów w których umieszczałem zniekształcenie i dokonywałem pomiaru widma.

W ten sposób otrzymałem pomiary widma, z którego mogłem wyodrębnić najmniejszą wartość własną λ_{min} i największą wartość własną λ_{max} dla każ-

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej

dego punktu i na ich podstawie stworzyć mapy izochorowe. Rysunek 4.6 a) przedstawia chmurę wartości λ_{min} w punktach pomiarowych, po których połączeniu otrzymałem mapy izochorowe najmniejszych wartości własnych λ_{min} . Dwuwymiarowa prezentacja danych (Rysunek 4.6 b), c)) pokazuje jak układają się wartości λ_{min} dla poszczególnych punktów pomiarowych. Linie izochorowe tworzą współśrodkowe okręgi, których środkiem jest punkt (0.5, 0.5). Wartości przyporządkowane poszczególnym liniom wzrastają w kierunku środka okręgów. Idealnie obrazuje to trójwymiarowa prezentacja danych (Rysunek 4.6 d)), która swoim wyglądem przypomina dwuwymiarowy rozkład Gaussa (rozkład normalny). Tabela 1.1 przedstawia analizę parametrów statystycznych struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych. W przypadku najmniejszych wartości własnych λ_{min} minimum jest równe 19.91 a maksimum 26.10. Średnia wartość λ_{min} równa jest 21.08. Wykres jest platokurtyczny (spłaszczony) co potwierdza jego kurtoza, która równa jest 1.22. Kurtoza porównuje jak bardzo dane są skoncentrowane wokół średniej w porównaniu z rozkładem normalnym (kurtoza dla rozkładu normalnego wynosi 3). Ponadto tabela zawiera wartości pierwszego kwartyla, mediany (drugi kwartyl), trzeciego kwartyla oraz wartość wariancji (pokazuje jak bardzo zbiór danych jest zróżnicowany) i odchylenia standardowego (mówi jak szeroko wartości danych są rozrzucone wokół średniej). Jeszcze jednym dość istotnym parametrem dla danych jest wysokość dzwona czyli rozstęp $R = \lambda_{max} - \lambda_{min}$. W tym przypadku rozstęp wynosi R = 6.19.

	λ_{min}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	K	R			
19.91	19.97	20.40	21.08	21.66	26.10	2.39	1.54	1.22	6.19			
	λ_{max}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	K	R			
81.29	81.87	82.18	82.99	83.54	88.70	2.95	1.72	-	7.41			

Tabela 4.1: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$.

Rysunek 4.7 przedstawia graficzną prezentację danych pomiarowych λ_{max} . Rysunek 4.7 a) przedstawia chmurę punktów pomiarowych, z których tworzyliśmy wykresy dla λ_{max} . Pierwszą własnością wartości największych widma jaka się narzuca jest ich symetria względem prostych x = 0.5 i y = 0.5. Na Rysunkach 4.7 b) i c) widzimy cztery rodziny owalnych okręgów współ-

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej





(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy wykresy dla λ_{min}

(b) Mapa izochorowa dla λ_{min}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{min}



(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{min}

Rysunek 4.6: Graficzna prezentacja danych wartości najmniejszych λ_{min} dla kwadratu $[0,1]\mathbf{x}[0,1]$





(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy wykresy dla λ_{max}

(b) Mapa izochorowa dla λ_{max}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{max}



(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{max}

Rysunek 4.7: Graficzna prezentacja danych wartości największych λ_{max} dla kwadratu $[0,1]\mathbf{x}[0,1]$

środkowych, które swoim wyglądem przypominają "pawie oczy". Ich środki a zarazem punkty, w których osiągane są największe wartości λ_{max} , to punkty (0.3, 0.3), (0.3, 0.7), (0.7, 0.3) i (0.7, 0.7). Osiągane wartości, to 88.38, 88.70, 88.49, 88.63. Rysunek 4.7 d) przedstawia trójwymiarowy wykres λ_{max} . Widzimy na nim symetrycznie rozłożone cztery ostrosłupy nachylone

ku środkowi kwadrata. Najmniejsza wartość jaką przyjmuje λ_{max} , to 81.29. Natomiast największą wartością jest 88.70. Średnia wartość λ_{max} wynosi 82.99, a rozstęp (czyli najwyższy graniastosłup) równy jest R = 7.41.

4.1.2 Przykład ilustrujący lokalizowanie uszkodzenia w kwadracie jednostkowym



Rysunek 4.8: Przykład ilustrujący miejsce położenia uszkodzenia w kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$.

Jako przykład ilustrujący moje rozważania, rozpatrzmy widmo postaci

[24.00, 50.36, 59.81, 85.10]. Dla tego pomiaru wartość minimalna wartości własnych to $\lambda_{min} = 24.00$, natomiast wartością maksymalną wartości własnych jest $\lambda_{max} = 85.10$. Z mapy izochorowej wartości minimalnych (Rysunek 4.6 b)) wybieramy obszar (pierścień) z zakresem [23, 25]. Dla wartości maksymalnej wartości własnych Z mapy izochorowej (Rysunek 4.7 b)) wartości maksymalnych wybieramy obszary (4 pierścienie) z zakresem [84, 86]. Wspólna część obydwu obszarów (odcinki koła o kolorze szarym na Rysunku 4.6) jest obszarem w którym znajduje się uszkodzenie. Czerwona kropka wskazuje dokładne położenie uszkodzenia. Jest ono w punkcie (0.6, 0.3).

Podsumowując ogólny sposób w jaki użytkownik może określić położenie uszkodzenia, to po pierwsze, z uzyskanego pomiaru należy wyodrębnić wartość najmniejszą λ_{min} i wartość największą λ_{max} widma. Następnie z map izochorowych najmniejszych i największych wartości własnych należy wyodrębnić odpowiednie obszary. Jako ostatni etap łączymy wyodrębnione obszary w jeden rysunek i w ten sposób otrzymujemy położenie uszkodzenia. Dla obszaru geometrycznego jakim jest kwadrat jednostkowy przykład został zaprezentowany powyżej. Dla obszarów geometrycznych jakimi są koło jednostkowe i elipsa odpowiednie przykłady są zaprezentowane na następnych stronach.

4.2 Koło jednostkowe S((0,0),1)

4.2.1 Opis doświadczenia oraz uzyskanych wyników

Kolejnym obszarem jaki został poddany badaniom było koło jednostkowe S((0,0),1)), czyli koło o środku w punkcie (x,y) = (0,0) i promieniu R = 1 [12]. Problem spektralny dla tak zadanego obszaru zapisuję poniżej:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\lambda u(x,y) & \text{w } S((0,0),1) \\ u(x,y) = 0 & \text{na } \partial(S((0,0),1)) . \end{cases}$$
(4.3)

Na rysunku 4.9 przedstawiona jest siatka punktów, w których umieszczałem zniekształcenie i dokonywałem pomiaru widma operatora Laplace'a. Tak jak to miało miejsce w przypadku kwadrata, tu również do każdego punktu z osobna stosowałem algorytm uzyskiwania wartości własnych.





Rysunek 4.10 przedstawia graficzną prezentację danych pomiarowych dla wartości najmniejszych λ_{min} wartości własnych uzyskanych dla koła jednostkowego. Podobnie jak w przypadku kwadrata tu również dane pomiarowe

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej

wartości najmniejszych λ_{min} wartości własnych porównam do rozkładu normalnego. Jest tylko jedna zasadnicza różnica. Na Rysunku 4.. c) widzimy przesunięcie (wcięcie) wartości w dół wzdłuż prostej o równaniu x = 0. Wyglądem swoim dwuwymiarowa kolorowa mapa izochorowa λ_{min} przypomina serca. W Tabeli 1.2 zestawione są statystyczne parametry struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych koła jednostkowego. Minimum λ_{min} równe jest 5.84. Maksimum najmniejszych wartości własnych λ_{min} wynosi 7.95. Średnia wartość najmniejszych wartości własnych to 6.29. Ponadto w Tabeli 1.2 możemy jeszcze zobaczyć, że wariancja λ_{min} wynosi 0.28, a odchylenie standardowe równe jest $\sigma = 0.53$. Rozstęp R = 2.11 mówi nam jak wysoki jest "dzwon", natomiast kurtoza K = 0.72 świadczy o tym, że wykres jest platokurtyczny czyli spłaszczony w porównaniu do rozkładu normalnego.

	λ_{min}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	K	R			
5.84	5.88	6.09	6.29	6.59	7.95	0.28	0.53	0.72	2.11			
	λ_{max}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	K	R			
86.21	87.14	87.88	88.34	89.55	93.42	2.31	1.52	-	7.21			

Tabela 4.2: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych koła jednostkowego.

Rysunek 4.11 przedstawia graficzną prezentację danych pomiarowych λ_{max} . Rysunek 4.11 a) przedstawia chmurę punktów pomiarowych, z których tworzyliśmy wykresy dla λ_{max} . Na mapach izochorowych (Rysunek 4.11 b), c)) widzimy, że wartości własne λ_{max} układają się we współśrodkowe okręgi o środku w punkcie (0,0). Możemy tutaj wyróżnić dwa dominujące obszary. Pierwszym z nich jest maksimum równe 93.42 osiągane w samym środku obszaru Ω . Na trójwymiarowej powierzchni λ_{max} (Rysunek 4.11 d)) jest to szpic. Drugim obszarem, który się wyróżnia jest pierścień o promieniu wewnętrznym $r_w = 0.7$ i promieniu zewnętrznym $r_z = 0.8$. Średnia wartość λ_{max} równa się 88.34 (Tabela 1.2). Ponadto w tabeli umieściliśmy wartość pierwszego kwartyla, która równa się 87.41, wartość mediany 87.88 oraz trzeciego kwartyla 89.55. Wariancja dla λ_{max} wynosi 2.31 a odchylenie standardowe równe jest 1.52. Rozstęp czyli wysokość szpica to R = 7.21.





(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy trój
wymiarowy wykres dla λ_{min}

(b) Mapa izochorowa dla λ_{min}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{min}



(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{min}

Rysunek 4.10: Graficzna prezentacja danych wartości najmniejszych λ_{min} dla koła jednostkowegoS((0,0),1)





(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy trój
wymiarowy wykres dla λ_{max}

(b) Mapa izochorowa dla λ_{max}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{max}



(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{max}

Rysunek 4.11: Graficzna prezentacja zebranych danych wartości największych λ_{max} dla koła jednostkowego S((0,0),1)

4.2.2 Przykład ilustrujący lokalizowanie uszkodzenia w kole jednostkowym

Jako przykład ilustrujący moje rozważania (Rysunek 4.12), rozpatrzmy widmo postaci [6.78, 52.53, 53.84, 87.43]. Dla tego pomiaru wartość minimalna wartości własnych to $\lambda_{min} = 6.78$, natomiast wartością maksymalną wartości własnych jest $\lambda_{max} = 87.43$. Z mapy izochorowej (Rysunek 4.10 b)) dla λ_{min} otrzymujemy obszar (pierścień) z zakresem [6.6, 6.8]. Dla wartości maksymalnej wartości własnych z mapy izochorowej (Rysunek 4.11 b)) otrzymujemy obszar (pierścień) o zakresie [87, 88]. Wspólna część obydwu obszarów (obszar oznaczony kolorem szarym na Rysunku 4.12) jest obszarem, w którym znajduje się uszkodzenie. Czerwona kropka wskazuje dokładne położenie uszkodzenia. Jest ono w punkcie (-0.4, -0.2).



Rysunek 4.12: Przykład ilustrujący miejsce położenia uszkodzenia w kole jednostkowym S((0,0), 1).

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej

4.3 Elipsa

4.3.1 Opis doświadczenia oraz uzyskanych wyników

Następnym obszarem jaki badałem jest elipsa o wielkiej półosi a = 1.5 i małej półosi b = 1 [11]. Ogniska elipsy leżą w punktach $F_1(-1.12, 0)$ i $F_2(1.12, 0)$. Niech symbol $E((F_1, F_2), 2a)$ oznacza elipsę o ogniskowych F_1 , F_2 i podwojonej wielkiej półosi 2a (w tym przypadku 2a = 3). Problem spektralny dla tak zadanego obszaru zapisuję poniżej:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\lambda u(x,y) & \text{w } E((F_1,F_2),3) \\ u(x,y) = 0 & \text{na } \partial(E((F_1,F_2),3)) . \end{cases}$$
(4.4)

Na rysunku 4.13 przedstawiona jest siatka punktów, w których umieszczałem zniekształcenie i dokonywałem pomiaru widma operatora Laplace'a. Jak to miało miejsce wcześniej do każdego punktu z osobna stosowałem algorytm, który jest opisany na początku obecnego rozdziału.



Rysunek 4.13: Siatka punktów, w których umieszczałem zniekształcenie i dokonywałem pomiaru widma.

Rysunek 4.14 przedstawia graficzną prezentację danych pomiarowych dla wartości najmniejszych λ_{min} wartości własnych uzyskanych dla elipsy. Podobnie jak w dwóch wcześniejszych przypadkach tu również dane pomiarowe





(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy trój
wymiarowy wykres dla λ_{min}

(b) Mapa izochorowa dla λ_{min}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{min}



(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{min}

Rysunek 4.14: Graficzna prezentacja danych wartości najmniejszych λ_{min} dla elipsy



(a) Chmura punktów pomiarowych, z których tworzymy trójwymiarowy wykres dla λ_{max}

(b) Mapa izochorowa dla λ_{max}



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{max}



(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{max}

Rysunek 4.15: Graficzna prezentacja danych wartości największych λ_{max} dla elipsy.

wartości najmniejszych λ_{min} wartości własnych porównam do rozkładu normalnego. Jak możemy zauważyć na Rysunku 4.14 d) wykres jest platokurtyczny (spłaszczony), co potwierdza wartość kurtozy K = 0.72 (Tabela 4.3). Wysokość "dzwona" czyli rozstęp otrzymanych danych, to R = 1.34. Minimalna wartość λ_{min} wynosi 4.21 a maksymalna równa jest 5.55 i osiągana ona jest w punkcie (0,0). Średnią wartością λ_{min} jest liczba 4.51. Wariancja równa się 0.11 przy odchyleniu standardowym równym $\sigma = 0.34$.

λ_{min}												
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	K	R			
4.21	4.24	4.36	4.51	4.58	5.55	0.11	0.34	0.72	1.34			
	λ_{max}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	K	R			
89.75	93.96	96.25	96.19	98.90	99.99	7.36	2.71	-	10.24			

Tabela 4.3: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych elipsy.

Rysunek 4.15 przedstawia graficzną prezentację danych wartości największych λ_{max} dla elipsy. Trudno jest w przypadku wartości największych doszukiwać się symetrii. Dane są bardzo zróżnicowane. Miara zróżnicowania czyli wariancja wynosi 7.36. Dla porównania wariancja dla kwadrata to 2.95, a wariancja danych wartości największych z koła jednostkowego wynosi 2.31. Na podstawie Rysunku 4.15 c) i d) możemy stwierdzić bardzo ogólnikowo, że wartości najmniejsze (kolor niebieski) dla elipsy rozkładają się wzdłuż prostych o równaniach x = -1 i x = 1. Natomiast wartości największe λ_{max} ciągną się wzdłuż prostej x = 0 oraz zajmują znaczącą większość centralnego obszaru elipsy, który można opisać jako prostokat o środku w punkcie (0,0) i dłuższym boku wzdłuż osi x równym 1.8, i krótszym boku wzdłuż osi y równym 1.4. W obszarze tym pojawiają się również wartości średnie i minimalne. Ponadto wartości średnie pojawiają się wzdłuż obwodu elipsy. Wysokie zróżnicowanie λ_{max} bardzo dobrze przedstawia trójwymiarowa powierzchnia (Rysunek 4.15 d)). Widzimy na nim poprzeplatane maksima i minima. W Tabeli 4.3 znajdziemy pozostałe wartości opisujące charakterystykę danych dla λ_{max} . Odchylenie standardowe, to $\sigma = 2.71$. Wartość minimalna dla λ_{max} wynosi 89.75. Wartością średnią jaką osiąga λ_{max} dla elipsy równa się 96.19. Natomiast maksimum to 99.99. Rozstęp R = 10.24 również jest najwyższy w porównaniu do dwóch wcześniejszych obszarów geometrycznych.

4.3.2 Przykład ilustrujący lokalizowanie uszkodzenia w elipsie

Jako przykład ilustrujący moje rozważania (Rysunek 4.16), rozpatrzmy widmo postaci [4.94, 10.07, 13.13, 15.46, 19.98, 24.86, 28.37, 28.88, 36.35, 39.93, 40.72, 49.26, 50.27, 51.57, 54.42, 63.97, 65.52, 68.52, 68.55, 71.07, 78.33, 80.43, 85.39, 89.72, 91.71, 98.41, 99.88]. Dla tego pomiaru wartość minimalna wartości własnych to $\lambda_{min} = 4.94$, natomiast wartością maksymalną wartości własnych jest $\lambda_{max} = 99.88$. Z mapy izochorowej wartości minimalnych (Rysunek 4.14 b)) wybieram obszar (pierścień) z zakresem [4.8, 5]. Dla wartości maksymalnej wartości własnych z mapy izochorowej (Rysunek 4.15 b)) wartości maksymalnych wybieram obszary z zakresem [99, 100]. Wspólna część obydwu obszarów (obszary oznaczony kolorem szarym na Rysunku 4.16) jest obszarem, w którym znajduje się uszkodzenie. Czerwona kropka wskazuje dokładne położenie uszkodzenia. Jest ono w punkcie (0.5, 0.1).



Rysunek 4.16: Przykład ilustrujący miejsce położenia uszkodzenia w elipsie.

4.4 Trójkąty

W tym podrozdziale opiszę badania dla obszarów geometrycznych jakimi są trójkąty równoboczny, równoramienny i trójkąt prostokątny. Aby nie powtarzać układu równań posłużę się symbolem trójkąta \triangle w celu oznaczenia obszar Ω dla wszystkich trzech trójkątów.

Problem spektralny dla tak zadanych obszarów geometrycznych zapisujemy poniżej:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\lambda u(x,y) & \text{w} \ \Delta \\ u(x,y) = 0 & \text{na} \ \partial(\Delta) \ . \end{cases}$$
(4.5)

W odróżnieniu od wcześniej prezentowanych wyników, w przypadku obszarów jakim są trójkąty, na rysunkach przedstawię jedynie mapy izochorowe dla wartości najmniejszych λ_{min} i wartości największych λ_{max} . Jako przykłady zaprezentuję metodę identyfikacji wizualnej, która polega na przyporządkowaniu danem pomiarowi wartość rozproszenia czyli liczby postaci $R_0 = \lambda_{max} - \lambda_{min}$. W zależności ile dane rozproszenie wynosi taki kolor zostanie podporządkowany otrzymanemu pomiarowi widma.

4.4.1 Trójkąt równoboczny

Na Rysunku 4.17 widzimy graficzną prezentację danych najmniejszych i największych wartości własnych dla trójkąta równobocznego. Trójwymiarowy wykres wartości najmniejszych wartości własnych można opisać jako ostrosłup o wysokość równej rozstępowi R = 24.97 (kurtoza ma wartość K =3.11). Wartość maksymalna wynosi 77.68 (Tabela 4.4) i jest osiągana w punkcie, który jest środkiem trójkąta równobocznego (punkt przecięcia się wysokości). Wartość minimalna to 52.71, a wartość średnia 56.33. Przy tak zróżnicowanych wartościach wariancja równa się 30.57. Odchylenie standardowe $\sigma = 5.53$.

Wartości największe wartości własnych trójkąta równobocznego (Rysunek 4.17 d)) są symetryczne względem wszystkich trzech wysokości trójkąta. Wartości maksymalne skupiają się wokół trzech punktów (0.3, 0.2), (0.7, 0.2) i (0.5, 0.5). Ich wartości to: 161.2, 161.7 i największa ze wszystkich trzech osiągana w środku trójkąta 163.8. Trójwymiarowy wykres przedstawiałby trzy ostrosłupy o średniej wysokości 36 (rozstęp czyli maksymalna wysokość to 36.6). W Tabeli 4.4 dla λ_{max} znajdziemy pozostałe dane statystyczne opisujące ich strukturę. Minimalna wartość λ_{max} , to 127.2. Wartość średnia



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla
 λ_{min}

(d) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{max}

Rysunek 4.17: Graficzna prezentacja danych wartości najmniejszej λ_{min} i wartości największych λ_{max} wartości własnych dla trójkąta równobocznego.

	λ_{min}												
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R				
52.71	52.89	53.34	56.33	57.87	77.68	30.57	5.53	3.11	24.97				
	λ_{max}												
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R				
127.2	130	133.9	137.5	143.6	163.8	92.53	9.62	-	36.6				

Tabela 4.4: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych trójkąta równobocznego.

równą się 137.5. Wariancja wynosi 92.53, a odchylenie standardowe równe jest $\sigma=9.62.$

Rysunek 4.18 przedstawia obraz rozstępów (różnica wartości największej i najmniejszej) obliczonych dla każdego punktu, w którym był robiony pomiar wartości najmniejszych i największych. Rysunek ten służy do identyfikacji wizualnej przybliżonego obszaru, w którym jest uszkodzenie. Kolor od czerwonego poprzez kolor pomarańczowy na kolorze żółtym kończąc, są to obszary w kształcie kół o środkach w punktach, w których λ_{max} osiągała wartości maksymalne. Przedział liczbowy odpowiadający tym kolorom to [82,111]. Następnym obszarem jaki wyróżnimy jest obszar o kolorze niebieskim (ciemny i jasny). Kształtem przypomina on serce i skupiony jest wokół środka trójkąta równobocznego. Jego zakres liczbowy, to przedział [45,70]. Wszystkim pozostałym wartościom rozstępu otrzymanego dla pojedynczego pomiaru należącym do przedziału [70,82] przyporządkujemy kolor zielony.





Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej

Dla przykładu weźmy widmo postaci [66.17, 159.3]. Rozstęp dla tego pomiaru równa się $R_0 = 159.3 - 66.17 = 93.13$. Liczba ta zawiera się w przedziale [82, 111]. Przyporządkowany kolor dla tego widma, to kolor pomarańczowy. Zatem obszarem, w którym jest uszkodzenie jest jedno z trzech kół.

4.4.2 Trójkąt równoramienny

Rysunek 4.19 przedstawia graficzna prezentacje danych najmniejszych i największych wartości własnych dla trójkąta równoramiennego. Trójwymiarowy wykres wartości najmniejszych wartości własnych podobnie do trójkata równobocznego ma postać ostrosłup o wysokość równej rozstępowi R = 22.13(kurtoza ma wartość K = 3.02). Wartość maksymalna wynosi 68.13 i jest osiągana w punkcie (0.5, 0.3). W Tabeli 4.5 znajdziemy ponadto wartość minimalną wartości najmniejszych λ_{min} , która równa się 46.00, a wartość średnia to 49.91. Wariancja równa się 22.47, a odchylenie standardowe $\sigma = 4.74$. Wartości największe wartości własnych trójkata równoramiennego (Rysunek 4.19 d)) są symetryczne względem wysokości trójkąta puszczonej z wierzchołka przecinających się ramion na jego podstawę. Wysokość ta leży na prostej o równaniu x = 0.5. Na rysunku widzimy pięć wartości maksymalnych osiąganych w punktach (0.3, 0.1), (0.7, 0.1), (0.5, 0.4), (0.5, 0.6) i (0.5, 07). Ich wartości to odpowiednio liczby: 198.1, 199.3 i największa ze wszystkich wartości osiągana w trzech ostatnich punktach 200. Trójwymiarowy wykres przedstawiałby cztery ostrosłupy o średniej wysokości 12 (rozstęp czyli maksymalna wysokość to 12.4). W Tabeli 4.5 dla λ_{max} znajdziemy pozostałe dane statystyczne opisujące ich strukturę. Minimalna wartość λ_{max} , to 187.6. Wartość średnia równą się 193.4. Wariancja wynosi 10.71, a odchylenie standardowe równe jest $\sigma = 3.27$.

	λ_{min}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R			
46.00	46.96	47.71	49.91	50.96	68.13	22.47	4.74	3.02	22.13			
	λ_{max}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R			
187.6	190.8	193.3	193.4	1956.6	200	10.71	3.27	-	12.4			

Tabela 4.5: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych trójkąta równobocznego.

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej



Rysunek 4.19: Graficzna prezentacja danych wartości najmniejszej λ_{min} i wartości największych λ_{max} wartości własnych dla trójkąta równoramiennego.

Rysunek 4.20 przedstawia obraz rozstępów R_0 uzyskanych z pojedynczych pomiarów dla trójkąta równoramiennego. Ciemny i jasny kolor niebieski jest to obszary, który znajduje się w centrum trójkąta równoramiennego i jest połączeniem koła z prostokątem w górnej jego części. Przedział liczbowy odpowiadający tym kolorom to [125, 137]. Następnym przedziałem liczbowym będzie przedział [137, 144] odpowiadający kolorom zielonemu i żółtemu. Na rysunku jest to obszar , który otacza kolor niebieski i dobiega do ramion trójkąta. W górnej części tworzy wygiętą linię na wysokości prostej y = 0.6, a w dolnej części odcina wierzchołki leżące u podstawy trójkąta tworząc dwa trójkąty. Trójkąty te to obszary o kolorach pomarańczowym i czerwonym. W sumie mamy trzy obszary odpowiadające tym kolor. Ostatni jest na gór-

nym wierzchołku trójkąta równoramiennego i również ma postać trójkąta z tą różnicą, że jego podstawa to linia wygięta. Przedział liczbowy przyporządkowany tym kolorom, to [144, 155].

Aby zobrazować metodę identyfikacji wizualnej weźmy dla przykładu widmo postaci [68.13, 198.00]. Rozstęp dla tego pomiaru równa się $R_0 = 129.87$. Liczba ta zawiera się w przedziale [125, 137]. Przyporządkowany kolor dla tego widma, to kolor niebieski. Zatem obszarem, w którym jest uszkodzenie jest centralny obszar środka trójkąta równobocznego.



Rysunek 4.20: Obraz rozstępów R_0 uzyskanych z pojedynczych pomiarów dla trójkąta równoramiennego.

4.4.3 Trójkąt prostokątny

Na Rysunku 4.21 widzimy graficzną prezentację danych najmniejszych i największych wartości własnych dla trójkąta prostokątnego. Trójwymiarowy wykres wartości najmniejszych wartości własnych można opisać jako ostrosłup o wysokość równej rozstępowi R = 22.32 (kurtoza ma wartość K = 3.37). Wartość maksymalna wynosi 72.71 (Tabela 4.6) i jest osiągana w punkcie

(0.3, 0.3). Wartość minimalna to 50.39, a wartość średnia 53.56. Wariancja równa się 23.35, a odchylenie standardowe $\sigma = 4.83$.

Wartości największe wartości własnych trójkąta prostokątnego (Rysunek 4.21 d)) są symetryczne względem wysokości wychodzącej z kąta prostego. Wartość maksymalna osiągana jest w punkcie (0.4, 0.4), i wynosi 200. Trójwymiarowy wykres przedstawiałby cztery ostrosłupy z jednym dominującym w punkcie osiągania maksimum. Jego wysokość równa się 24.



(c) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{min} (d) Kolorowa mapa izochorowa dla λ_{max}

Rysunek 4.21: Graficzna prezentacja danych wartości najmniejszej λ_{min} i wartości największych λ_{max} wartości własnych dla trójkąta prostokątnego.

W Tabeli 4.6 dla λ_{max} znajdziemy pozostałe dane statystyczne opisujące ich strukturę. Minimum wynosi 176, wartość średnia równą się 183.5. Wariancja równa jest 21.22, a odchylenie standardowe to $\sigma = 4.61$. Rysunek 4.22 przedstawia obraz rozstępów R_0 uzyskanych z pojedynczych pomiarów dla trójkąta prostokątnego. Wokół punktów (0.1, 0.6), (0.6, 0.1) i (0.4, 0.4)

ROZDZIAŁ 4. WYNIKI BADAŃ PODSTAWOWYCH OBSZARÓW GEOMETRYCZNYCH

	λ_{min}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R			
50.39	50.62	51.11	53.56	54.57	72.71	23.35	4.83	3.37	22.32			
	λ_{max}											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R			
176.0	181.0	182.2	183.5	185.0	200	21.22	4.61	-	24			

Tabela 4.6: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych trójkąta prostokątnego.



Rysunek 4.22: Obraz rozstępów R_0 uzyskanych z pojedyn
czych pomiarów dla trójkąta prostokątnego.

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej

skupione są obszary o najwyższych wartościach R_0 . Jest to kolor czerwony (ciemny i jasny). Przedział liczbowy przyporządkowany temu kolorowi, to [135, 145]. W narożnikach trójkąta znajdują się obszary o kolorze pomarańczowym. Przedział liczbowy, to [130, 135]. Niebieski kolor odpowiada najniższym wartościom R_0 , a jego przedział liczbowy to [110, 123]. Kształtem podobny jest do dwóch połówek koła stykających się ze sobą. Znajduje się on w centrum trójkąta. Ostatnim wyróżnionym obszarem jest obszar odpowiadający kolorowi zielonemu. Znajduje się on w pozostałych częściach trójkąta prostokątnego. Odpowiadający mu przedział liczbowy to [123, 130].

Aby zobrazować metodę identyfikacji wizualnej weźmy dla przykładu widmo postaci [51.60, 185.00]. Rozstęp dla tego pomiaru równa się $R_0 = 133.40$. Liczba ta zawiera się w przedziale [130, 135]. Przyporządkowany kolor dla tego widma, to kolor pomarańczowy. Zatem obszar, w którym jest uszkodzenie, to jeden z narożników trójkąta prostokątnego.

4.5 Podsumowanie rozdziału

Podsumowując ogólny sposób w jaki użytkownik może określić położenie uszkodzenia, to po pierwsze, z uzyskanego pomiaru należy wyodrębnić wartość najmniejszą λ_{min} i wartość największą λ_{max} widma. Następnie w przypadku korzystania z metody map izochorowych należy wyodrębnić odpowiednie obszary z map izochorowych najmniejszych i największych wartości własnych. Jako ostatni etap łączymy wyodrębnione obszary w jeden i w ten sposób otrzymujemy położenie uszkodzenia. W przypadku metody identyfikacji wizualnej na podstawie różnicy wartości największej λ_{max} i wartości najmniejszej λ_{min} dostajemy konkretną liczbę i na jej podstawie określamy położenie uszkodzenia.

Wspólną cechą dla wszystkich przebadanych figur geometrycznych jest postać wykresów wartości najmniejszych λ_{min} wartości własnych. Układają się one w postać rozkładu normalnego (kapelusz Gaussa). Dla różnych obszarów geometrycznych charakterystyka liczbowa (wygląd kapelusza) różnią się między sobą. Kwadrat ma najwyższe λ_{min} (zaczynają się od 19.91) i zarazem największych rozstęp R = 6.19. Wartości najmniejsze λ_{min} koła zaczynają się od 5.84 a rozstęp wynosi R = 2.11. Elipsa ma najmniejsze wartości λ_{min} spośród wszystkich badanych figur. Zaczynające się one od wartości 4.21 a ich rozstęp wynosi R = 1.34 i również jest najmniejszy. W przypadku trójkątów wartości najmniejsze λ_{min} wartości własnych zaczynają się od 52.71
dla trójkata równobocznego, 46.00 dla trójkata równoramiennego i 50.39 w przypadku trójkąta prostokątnego. Ich rozstępy dla λ_{min} również są najwyższe spośród badanych obszarów i wynoszą odpowiednio 24.97, 22.13 i 22.32. Mapy izochorowe wartości największych λ_{max} kwadratu i koła wykazują wysoki stopień symetrii. Dla elipsy natomiast symetria jest mocno zaburzona. Dla kwadratu wartości największe λ_{max} wartości własnych zaczynają się od 81.29 a ich rozstęp wynosi 7.41. Z kolei najmniejsza wartość λ_{max} dla koła, to 86.21 a ich rozstęp równy jest 7.21. Elipsa ma najwyższą minimalną wartość λ_{max} równą 89.75 i największy rozstęp równy 10.24. O tym jak bardzo zaburzona jest symetria i regularność λ_{max} świadczy wysoki stopnień zróżnicowania wartości λ_{max} czyli wariancja. Dla elipsy wynosi ona 7.36 a dla kwadratu i koła odpowiednio 2.95 i 2.31. Ponieważ dla wartości największych λ_{max} wartości własnych trójkątów w przedziale [0, 100] otrzymywałem tylko jedną wartość własną, dlatego rozszerzyłem zakres widma do 200. W każdym z trzech trójkątów występuje przynajmniej jedna oś symetrii i pokrywa się ona z wysokościa trójkata. W przypadku trójkata równobocznego wartości λ_{max} zaczynają się od liczby 127.2 i mają największy rozstęp równy 36.6. Minimalna wartość λ_{max} trójkąta równoramiennego, to 187.6 a ich rozstęp wynosi 12.4. Dla trójkąta prostokątnego najmniejsza wartość λ_{max} , to 176 a ich rozstęp równy jest 24.

Rozdział 5

Analiza widma operatora Laplace'a dla kwadratów o bokach 1, 2, 3 z uszkodzeniem wewnętrznym

5.1 Wprowadzenie

W trakcie moich badań dotyczących numerycznego widma operatora Laplace'a dla różnych obszarów geometrycznych z uszkodzeniem nasunęło się naturalne pytanie jak zmienia się numeryczne widmo operatora Laplace'a, gdy zwiększa się rozmiar badanego obszaru? Czy widmo to zachowuje symetrię jeżeli takowa była. Czy kształtem jest podobne do widma obszaru o mniejszym boku? Co możemy powiedzieć o kształtach map izochorowych dla kwadratów o bokach 1, 2 i 3 jednostki? Czy dla badanych kwadratów możemy określić przybliżone położenie uszkodzenia na podstawie widma operatora Laplace'a, tak jak to możemy zrobić dla kwadrata, koła i elipsy? Są to ważne pytania nie tylko od strony teoretycznej, ale są one również ważne ze względu na zastosowania. Materiały, które poddawane są badaniom, mają różne rozmiary. Okazuje się, ze numeryka dla postawionego problemu zachowuje się w dość nieoczekiwany sposób.

W niniejszym rozdziale przedstawię badania przeprowadzone dla kwadratów o bokach równych odpowiednio 1, 2 i 3 jednostki.

5.2 Opis i analiza otrzymanych wyników

Na Rysunku 5.1 widzimy kolorowe mapy izochorowe minimalnych i maksymalnych wartości własnych λ_{min} i λ_{max} kwadratów o rozmiarach $[0, 1] \times [0, 1]$, $[0,2] \times [0,2]$ i $[0,3] \times [0,3]$. Ponieważ kwadrat o wymiarach $[0,1] \times [0,1]$ był omawiany we wcześniejszym rozdziale, dlatego skupię się na analizie kwadratów o wymiarach $[0,2] \times [0,2]$ i $[0,3] \times [0,3]$. Tak jak to miało miejsce dla wcześniej przebadanych obszarów geometrycznych, tak i dla kwadratów o bokach 2 i 3 kolorowe mapy izochorowe minimalnych wartości własnych λ_{min} tworzą koła współśrodkowe o środkach w punktach przecięcia się przekątnych czyli (1, 1) i (1.5, 1.5) odpowiednio dla kwadratów o bokach 2 i 3 (Rysunek 5.1 c) i e)). Trójwymiarowa powierzchnia minimalnych wartości własnych λ_{min} dla kwadratów o bokach 2 i 3, to kapelusze Gaussa (Rysunek 5.2 c) i e)). Statystyczne parametry struktury danych najmniejszych wartości własnych λ_{min} dla kwadratów o wymiarach $[0,2] \times [0,2]$ i $[0,3] \times [0,3]$ zestawione są w Tabeli 5.1. Dla kwadratu o boku równym 2 minimum wartości najmniejszych λ_{min} to 4.98. Natomiast maksimum wynosi 6.72. Średnia wartość λ_{min} równa jest 5.32. Wysokość kapelusza czyli rozstęp wynosi 1.74. Odnotujmy ponadto, że wariancja równa jest 0.19. Dla kwadratu o boku 3 wartość minimalna wartości własnych λ_{nim} równa się 2.21, a maksimum to 2.91. Srednia wartość jaką przyjmuje λ_{min} dla kwadratu o boku równym 3 wynosi 2.36. Rozstęp danych czyli różnica między maksimum λ_{min} a minimum λ_{min} równa jest 0.7. Jako wniosek powyższych rozważań możemy stwierdzić, iż wraz ze wzrostem długości boku kwadratu różnica między maksymalną wartością własną λ_{min} a minimalną wartością wartości własnych λ_{min} maleje. Innymi słowy kapelusz Gaussa staje się coraz mniejszy.

Kolorowe mapy izochorowe maksymalnych wartości własnych λ_{max} dla kwadratów o bokach równych 1, 2 i 3 przedstawione są na Rysunku 5.1 b), d) i f). Jak można łatwo zauważyć odpowiedź na pytanie o podobieństwo między widmem dla poszczególnych kwadratów jest negatywna. W przypadku kwadratu o wymiarach $[0, 2] \times [0, 2]$ minimalne wartości wartości własnych λ_{max} znajdują się w miejscach, w których spodziewaliśmy się odczytywać wartości maksymalne. Skupiają się one wokół czterech punktów (0.7, 0.7), (0.6, 1.4), (1.4, 0.6) i (1.4, 1.4). Z drugiej strony analizując położenie maksymalnych wartości wartości własnych λ_{max} widzimy, że skupiają się one w rogach kwadratu oraz położone są wzdłuż prostych o równaniach y = 1 i x = 1 w punktach o współrzędnych (0.2, 1), (1.5, 1), (1.8, 1), (1, 0.3) i (1, 1.8). Z Tabeli 5.1 możemy odczytać, że minimum λ_{max} równa się 95.02 a maksi-

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej







(c) Kolorowa mapa izochorowa λ_{min} kwadratu o boku 2 z uszkodzeniem.







(b) Kolorowa mapa izochorowa λ_{max} kwadratu o boku 1 z uszkodzeniem.



(d) Kolorowa mapa izochorowa λ_{max} kwadratu o boku 2 z uszkodzeniem.



(f) Kolorowa mapa izochorowa λ_{max} kwadratu o boku 3 z uszkodzeniem.

Rysunek 5.1: Kolorowe mapy izochorowe minimalnych i maksymalnych wartości własnych λ_{min} i λ_{max} kwadratów o bokach 1, 2, 3.

76



(a) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{min} kwadratu o boku 1 z uszkodzeniem.



(c) Trójwymiarowa powierzchni
a λ_{min} kwadratu o boku 2 z uszkodzeniem.



(e) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{min} kwadratu o boku 3 z uszkodzeniem.

(f) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{max} kwadratu o boku 3 z uszkodzeniem.

Rysunek 5.2: Trójwymiarowe powierzchnie minimalnych i maksymalnych wartości własnych λ_{min} i λ_{max} kwadratów o bokach 1, 2, 3.



(b) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{max} kwadratu o boku 1 z uszkodzeniem.



(d) Trójwymiarowa powierzchnia λ_{max} kwadratu o boku 2 z uszkodzeniem.



			λ_{min} kwad	ratu [0, 1]	$\times [0,1]$						
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
19.91	19.97	20.40	21.08	21.66	26.10	2.39	1.54	1.22	6.19		
λ_{max} kwadratu $[0,1] \times [0,1]$											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
81.29	81.87	82.18	82.99	83.54	88.70	2.95	1.72	_	7.41		
λ_{min} kwadratu $[0,2] \times [0,2]$											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
4.98	5.00	5.13	5.32	5.49	6.72	0.19	0.43	1.02	1.74		
λ_{max} kwadratu $[0,2] \times [0,2]$											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
95.02	96.45	97.05	97.11	97.73	99.96	0.96	0.98	-	4.94		
λ_{min} kwadratu $[0,3] \times [0,3]$											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
2.21	2.22	2.28	2.36	2.45	2.91	0.03	0.18	0.83	0.7		
λ_{max} kwadratu $[0,3] \times [0,3]$											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
04 40	96.38	97.60	97.59	98.90	100.00	2.15	1.47	-	5.6		

Tabela 5.1: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych kwadratów o bokach 1, 2, 3.

-mum to 99.96. Średnia wartość jaką osiąga λ_{max} dla kwadratu o wymiarach $[0, 2] \times [0, 2]$ wynosi 97.11. Rozstęp równy jest 4.94 a wariancja wynosi 0.96. Mapa izochorowa wartości własnych λ_{max} kwadratu o wymiarach $[0, 3] \times [0, 3]$ przedstawiona jest na Rysunku 5.1 f). Widzimy na nim, że wartości największe λ_{max} znajdują się w rogach kwadratu i przenikają wzdłuż przekątnych w kierunku środka. Wartości najmniejsze z kolei znajdują się w centralnej części kwadratu i przypominają romb. Minimalna wartość wartości własnych λ_{max} dla kwadratu o wymiarach $[0, 3] \times [0, 3]$ to 94.40, a maksymalna wynosi 100. Średnia wartość λ_{max} równa się 97.53. Rozstęp ma wartość 5.6 przy wariancji równej 2.15. Na Rysunku 5.2 b), d) i f) przedstawione zostały trójwymiarowe powierzchnie maksymalnych wartości własnych λ_{max} wszystkich trzech kwadratów. Widzimy na nich, ze wraz ze wzrostem długości boku powierzchnia staje się coraz bardziej zagęszczona przez lokalne minima i maksyma, w postaci spiczastych ostrosłupów. Jako wniosek powyższych obserwacji odnotujmy, iż dla maksymalnych wartości własnych λ_{max}

78





(b) Symetria względem prostej x=0.5. Maksima















Rysunek 5.3: Badanie symetrii najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$.





(b) Symetria względem prostej x=0.5. Maksima



(d) Symetria względem prostej y=0.5. Maksima







przekątnej y=2-x. Minima

(h) Symetria względem przekątnej y=2-x. Maksima

Rysunek 5.4: Badanie symetrii najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych kwadratu $[0, 2] \times [0, 2]$.

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej







(b) Symetria względem prostej x=0.5. Maksima



(d) Symetria względem prostej y=0.5. Maksima



(f) Symetria względem przekątnej y=x. Maksima



(h) Symetria względem przekątnej y=3-x. Maksima

Rysunek 5.5: Badanie symetrii najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych kwadratu $[0,3] \times [0,3]$.

Mateusz Brzęk Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej

wraz ze wzrostem długości boku kwadratu widmo staje się coraz bardziej zagęszczone (pofałdowane). Traci ono swoją regularność.

Jako ostatnie zagadnienie do opisania zostało jeszcze pytanie o symetrię widma. Przez symetrie rozumieć bedziemy wartość różnicy miedzy poszczególnymi punktami. Rysunek 5.3, 5.4, 5.5 przedstawia kolejno numeryczną analizę symetrii najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych dla kwadratów o wymiarach $[0,1] \times [0,1], [0,2] \times [0,2]$ i $[0,3] \times [0,3]$. Dla każdego kwadratu z osobna rozważaliśmy symetrię względem prostych o równaniach x = 0.5 i y = 0.5 oraz symetrię względem przekatnych czyli prostych o równaniach y = x i y = 1 - x, y = 2 - x, y = 3 - x. Aby uzyskać różnicę między poszczególnymi punktami najpierw odpowiednio modyfikowaliśmy macierz z punktami pomiarowymi a następnie odejmowaliśmy ją od macierzy pierwotnej. Dla symetrii względem środkowych boków użyliśmy funkcji zamiany miejscami. W przypadku przekątnych stosowaliśmy funkcję transpozycji lewo i prawostronnej. Przeanalizujemy najpierw symetrię wartości najmniejszych λ_{min} . Spośród trzech kwadratów najmniejszą ilość i wielkość niebieskich i czerwonych plam zawiera kwadrat o boku równym 3 (Rysunek 5.5 a), c), e), g)). Następnym jest kwadrat o boku równym 2 (Rysunek 5.4 a), c), e), g)). Największą ilość i wielkość różnicy (plamy niebieskie i czerwone) dla wartości najmniejszych λ_{min} ma kwadrat o boku równym 1. Na podstawie powyższej analizy możemy stwierdzić, że wraz ze wzrostem długości boku poprawiają się własności symetrii dla wartości najmniejszych λ_{min} . W przypadku wartości największych λ_{max} najgorsze własności symetrii ma kwadrat o boku równym 3. Potwierdzają to obrazy symetrii przedstawione na rysunkach 5.5 b), d), f), h). Na obrazach symetrii kwadratu o boku równym 2 (Rysunek 5.4 b), d), f), h)) widzimy, że dużą cześć obszarów pokrywa kolor żółty i występują plamy niebieskie i czerwone. Dla kwadrata o boku równym 1 (Rysunek 5.3 b), d), f), h)) ta różnica jest dużo mniejsza. Na podstawie powyższej analizy możemy stwierdzić, że wraz ze wzrostem długości boku pogarszają się własności symetrii dla wartości największych λ_{max} .

Rozdział 6

Porównanie obrazów numerycznego widma operatora Laplace'a dla kół o promieniach 1 i 2 z uszkodzeniem wewnętrznym

6.1 Wprowadzenie

W rozdziale tym porównam obrazy numerycznego widma operatora Laplace'a dla kół o promieniach 1 i 2 z uszkodzeniem wewnątrz nich. Podobnie jak w przypadku kwadratów, takie same pytania odnośnie symetrii, regularności i powtarzalności kształtów widma zadałem dla kół. W przypadku kół zbadałem jedynie koła o promieniu jeden i dwa. Ponieważ dla koła o promieniu dwa jest tak duża ilość punktów pomiarowych przy praktycznie zerowym podobieństwie do widma koła o promieniu jeden, dlatego nie badałem koła o promieniu trzy.

Poniżej przedstawiam wyniki moich symulacji w postaci kolorowych map izochorowych i trójwymiarowych powierzchni najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych. Ponadto umieszczam tabelę zawierającą podstawowe dane statystyczne opisujące strukturę danych uzyskanych z pomiarów.

6.2 Opis i analiza otrzymanych wyników

Rysunek 6.1 przedstawia kolorowe mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych dla kół o promieniach równych 1 i 2 oraz środkach w początku układu współrzędnych. W przypadku koła o promieniu równym 1 widzimy, że dla wartości najmniejszych λ_{min} (Rysunek 6.1 a)) symetria jest zaburzona. Wzdłuż prostej o równaniu x = 0 następuje przesunięcie wartości w dół. Tym razem okręgi współśrodkowe przypominają kształtem serce. Wartości największe λ_{max} wartości własnych koła o promieniu jeden opisane były w rozdziale 4.2. Zwrócimy uwagę jedynie na fakt, że obraz wartości największych (Rysunek 6.1 b)) wykazuje dużą symetrię i regularność. Rysunek 6.1 c) przedstawia kolorową mapę izochorową. najmniejszych wartości własnych λ_{min} koła o promieniu równym 2. Są to koła współśrodkowe o środku w początku układu współrzędnych. Na Rysunku 6.2 c) widzimy trójwymiarową powierzchnię najmniejszych wartości własnych λ_{min} koła o promieniu równym 2. Tak jak dla każdego wcześniejszego obszaru jest to kapelusz Gaussa o wysokości równej rozstępowi R = 0.44. Z Tabeli 6.1 możemy odczytać pozostałe dane statystyczne opisujące kapelusz. Minimalna wartość najmniejszych wartości własnych λ_{min} koła o promieniu równym 2 wynosi 1.46. Średnia wartość jaką przyjmuje λ_{min} to 1.57. Największą wartość osiąga w punkcie (0,0) i jest ona równa 1.90.

λ_{min} koła o promieniu 1											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
5.84	5.88	6.09	6.29	6.59	7.95	0.28	0.53	0.72	2.11		
λ_{max} koła o promieniu 1											
Min.	1st Qu.	Mediana	Średnia	3rd Qu.	Max.	Var	σ	Κ	R		
86.21	87.14	87.88	88.34	89.55	93.42	2.31	1.52	-	7.21		
λ_{min} koła o promieniu 2											
			λ_{min} koła	a o promie	niu 2						
Min.	1st Qu.	Mediana	λ_{min} koła Średnia	a o promie 3rd Qu.	niu 2 Max.	Var	σ	K	R		
Min. 1.46	1st Qu. 1.48	Mediana 1.53	$\begin{array}{c} \lambda_{min} \text{ koła}\\ \text{Średnia}\\ 1.57 \end{array}$	a o promie 3rd Qu. 1.63	niu 2 Max. 1.90	Var 0.01	σ 0.11	K 0.20	R 0.44		
Min. 1.46	1st Qu. 1.48	Mediana 1.53	$\begin{array}{c} \lambda_{min} \text{ koła}\\ \text{Średnia}\\ 1.57\\ \lambda_{max} \text{ koła} \end{array}$	a o promie 3rd Qu. 1.63 a o promie	niu 2 Max. 1.90 miu 2	Var 0.01	σ 0.11	K 0.20	R 0.44		
Min. 1.46 Min.	1st Qu. 1.48 1st Qu.	Mediana 1.53 Mediana	$\begin{array}{c} \lambda_{min} \text{ koła} \\ \text{Średnia} \\ 1.57 \\ \lambda_{max} \text{ koła} \\ \text{Średnia} \end{array}$	a o promie 3rd Qu. 1.63 a o promie 3rd Qu.	niu 2 Max. 1.90 eniu 2 Max.	Var 0.01 Var	σ 0.11 σ	K 0.20 K	R 0.44 R		

Tabela 6.1: Zestawienie statystycznych parametrów struktury danych najmniejszych i największych wartości własnych kół o promieniach 1 i 2.



(a) Kolorowa mapa izochorowa λ_{min} koła o promieniu 1 z uszkodzeniem.



(c) Kolorowa mapa izochorowa λ_{min} koła o promieniu 2 z uszkodzeniem.



(b) Kolorowa mapa izochorowa λ_{max} koła o promieniu 1 z uszkodzeniem.



(d) Kolorowa mapa izochorowa λ_{max} koła o promieniu 2 z uszkodzeniem.

Rysunek 6.1: Kolorowe mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych kół o promieniach 1 i 2.



(a) Trójwymiarowa powierzchnia najmniej- (b) Trójwymiarowa powierzchnia największych wartości własnych λ_{min} numerycznego szych wartości własnych λ_{max} numerycznego widma operatora Laplace'a dla koła o promieniu 1 z uszkodzeniem. mieniu 1 z uszkodzeniem.



(c) Trójwymiarowa powierzchnia najmniej- (d) Trójwymiarowa powierzchnia największych wartości własnych λ_{min} numerycznego szych wartości własnych λ_{max} numerycznego widma operatora Laplace'a dla koła o promieniu 2 z uszkodzeniem. mieniu 2 z uszkodzeniem.

Rysunek 6.2: Trójwymiarowe powierzchnie najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych kół o promieniach 1 i 2.

Odnotujmy ponadto, że wariancja równa się 0.01, a odchylenie standardowe wynosi 0.11. Kolorowa mapa izochorowa najmniejszych wartości własnych λ_{min} koła o promieniu równym 2 wykazuje pełną symetrię względem dowolnej średnicy. Przeanalizujemy teraz wartości największe λ_{max} wartości własnych dla koła o promieniu równym 2. Rysunek 6.1 d) przedstawia kolorową mapę izochorową λ_{max} . Widzimy na nim jak punkty o wartościach maksymalnych są porozrzucane w sposób nieuporządkowany i przenikają się wzajemnie z wartości potwierdza trójwymiarowa powierzchnia wartości największych λ_{max} (Rysunek 6.2 d)). Podstawowe dane statystyczne dla największych wartości własnych λ_{max} odczytujemy z tabeli 6.11 Wartość najmniejsza równa jest 96.06, średnią wartość jaką osiąga λ_{max} , to 98.99. Wartość największa wynosi 100.00. Wariancja równa jest 0.57 a odchylenie standardowe 0.76. Rozstęp R = 3.94.

Jako podsumowanie rozdziału 6 możemy stwierdzić następujące wnioski. Wartości najmniejsze λ_{min} wartości własnych przyjmują postać kapelusza Gaussa z tą różnicą, że wraz ze wzrostem promienia maleje zakres λ_{min} . Kapelusz jest mniejszy. Ponadto lepszą symetrię wykazują wartości najmniejsze λ_{min} koła o promieniu równym 2. Obrazy wartości największych λ_{max} wartości własnych dla kół o promieniach 1 i 2 w bardzo dużym stopniu różnią się między sobą. Wartości największe λ_{max} koła o promieniu 1 są regularne i symetryczne względem dowolnej średnicy. Wartości największe λ_{max} koła o promieniu 2 nie wykazują praktycznie żadnej symetrii i regularności. Jako wniosek możemy stwierdzić, że wraz ze wzrostem promienia koła wartości własne λ_{max} tracą zupełnie własności regularności i symetrii.

Rozdział 7

Podsumowanie

Niniejsza praca zatytułowana "Wykrywanie i lokalizacja uszkodzeń struktury w wybranych obszarach geometrycznych z wykorzystaniem teorii spektralnej" przedstawia oryginalne wyniki badań naukowych (część z nich została opublikowana w renomowanych czasopismach naukowych [11], [12], [13]) nad problemem przybliżonego lokalizowania uszkodzenia w obszarach geometrycznych jakimi są kwadrat jednostkowy, koło o promieniu jeden, elipsie o małej półosi równej 1 i wielkiej półosi równej 1.5, trójkatach równobocznym, równoramiennym i trójkacie prostokatnym przy użyciu widma operatora Laplace'a jako narzędzia badawczego. Na poczatku rozdziału 4 przedstawiliśmy metodę dokonywania pomiarów i uzyskiwania danych potrzebnych do stworzenia map izochorowych i obrazów rozstępów stosowanych w metodzie identyfikacji wizualnej. Dla kwadrata, koła i elipsy prezentuję mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych, kolorowe mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych oraz trójwymiarowe powierzchnie najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych. Ponadto w postaci tabeli zestawiam statystyczne parametry struktury danych takie jak minimum, pierwszy kwartyl, mediana, średnia, trzeci kwartyl, maksimum, wariancja, odchylenie standardowe, kurtoza i rozstęp. Na końcu każdego paragrafu dla powyższych trzech obszarów zaprezentowany jest przykład ilustrujący przybliżone lokalizowanie uszkodzenia przy użyciu map izochorowych.

W przypadku obszarów geometrycznych jakimi są trójkąty równoboczny, równoramienny i trójkąt prostokątny autor zaproponował metodę wizualnej identyfikacji przybliżonych obszarów, w których znajduje się uszkodzenie. Polega ona na stworzeniu kolorowej mapy rozstępów widma i dopasowaniu odpowiednich kolorów do przedziałów liczbowych widma. W paragrafach 4.4.1, 4.4.2 i 4.4.3 przedstawiłem mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych dla trójkąta równobocznego, równoramiennego i trójkąta prostokątnego oraz ich kolorowe mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych. W tabelach 4.4, 4.5 i 4.6 zestawiłem statystyczne parametry struktury danych najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych dla powyższych trzech trójkątów. Ponadto na końcu każdego podparagrafu prezentowane są obrazy rozstępów i przykłady użycia wizualnej metody identyfikacji przybliżonych obszarów uszkodzenia.

W rozdziale 5 poddaję analizie widmo operatora Laplace'a dla kwadratów o bokach 1, 2, 3 z uszkodzeniem wewnątrz nich. Prezentuję mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych i trójwymiarowe powierzchnie najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych dla wszystkich trzech kwadratów. W tabeli 5.1 zestawiam statystyczne parametry struktury danych najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych kwadratów o bokach równych 1, 2 i 3. W celu zbadania regularności i symetrii widma stworzyliśmy obrazy różnicy między poszczególnymi wartościami własnymi aby w ścisły sposób określić ich poziom.

W rozdziale 6 porównałem obrazy numerycznego widma operatora Laplace'a dla kół o promieniach 1 i 2. Przedstawiam kolorowe mapy izochorowe najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych oraz trójwymiarowe powierzchnie najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych. W tabeli 6.1 zestawiamy statystyczne parametry struktury danych najmniejszych λ_{min} i największych λ_{max} wartości własnych kół o promieniach równych 1 i 2.

Podsumowując ogólny sposób w jaki użytkownik może określić położenie uszkodzenia, to po pierwsze, z uzyskanego pomiaru należy wyodrębnić wartość najmniejszą λ_{min} i wartość największą λ_{max} widma. Następnie w przypadku korzystania z metody map izochorowych należy wyodrębnić odpowiednie obszary z map izochorowych najmniejszych i największych wartości własnych. Jako ostatni etap łączymy wyodrębnione obszary w jeden i w ten sposób otrzymujemy położenie uszkodzenia. W przypadku metody identyfikacji wizualnej na podstawie różnicy wartości największej λ_{max} i wartości najmniejszej λ_{min} dostajemy konkretną liczbę i na jej podstawie określamy położenie uszkodzenia.

Metodę lokalizowania uszkodzenia struktury przedstawioną w niniejszej rozprawie doktorskiej możemy próbować zastosować w badaniach nieniszczących między innymi do analizy otrzymanych pomiarów takich jak np. fala

sprężysta. Innym obszarem zastosowań może być analiza modalna lub wibroakustyka. Jako parametry pomiarowe możemy użyć długość fali, amplitudę lub częstość drgań.Należy jednak podkreślić, że są to jedynie rozważania teoretyczne i dopiero dalsze badania naukowe mogą potwierdzić jej praktyczne zastosowanie.

Jako moje osiągnięcia w niniejszej rozprawie doktorskiej mogę wypunktować następujące rzeczy:

1) Stworzenie metody i algorytmu uzyskiwania danych potrzebnych do stworzenia map izochorowych.

2) Stworzenie map izochorowych wartości najmniejszych i wartości największych wartości własnych następujących obszarów geometrycznych: kwadrat, koło, elipsa oraz obszarów rozstępów dla obszarów jakimi są trójkąt równoboczny, trójkąt równoramienny i trójkąt prostokątny.

3) Metoda określenia położenia uszkodzenia na podstawie map izochorowych następujących obszarów geometrycznych: kwadrat, koło, elipsa.

4) Metoda identyfikacji wizualnej położenia uszkodzenia następujących obszarów geometrycznych: trójkąt równoboczny, trójkąt równoramienny i trójkąt prostokątny.

5) Kolorowe mapy izochorowe kwadratów o bokach równych 1,2 i 3.

6) Rysunki przedstawiające symetrię najmniejszych i największych wartości własnych kwadratów o bokach równych 1, 2 i 3.

7)Kolorowe mappy izochorowe najmniejszych i największych wartości własnych kół o promieniach 1 i 2.

Dalsze badania będą uwzględniać sposób zaimplementowania metody oraz uzyskanych wyników do obiektów rzeczywistych i różnych rodzajów ich zastosowań wymienionych wcześniej.

Bibliografia

- Adams D. Health Monitoring of Structural Materials and Components: Methods with Applications. Willey, New York: 1-476, 2007.
- [2] Arendt W., Nittka R., Peter W., Steiner F. Weyl's law: spectral properties of the Laplacian in mathematics and physics. Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity. Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2009.
- [3] Auchmuty G. Bases and comparison results for linear elliptic eigenproblems. J. Math. Anal. Appl. 390: 394-406, 2012.
- [4] Balageas J, Fritzen C, Guemes A. Structural Health Monitoring Systems. ISTE, 2006.
- [5] Betz C.E. Principles of Magnetic Particle Testing. Magnaflux, Hardwood Heights, Illinois, 1997.
- [6] Blanchard P., Bruning E. Variational Methods in Mathematical Physics. A Unified Approach. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [7] Boller C., Staszewski W. Structural Health Monitoring Systems of Aerospace Structures. Willey, 2004.
- [8] Boller C., Fou-Kuo Chang, Fujino Y. Encyclopedia of Structural Health Monitoring. 1st Edition. Willey, London, 2009.
- [9] Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [10] Browkin J. Teoria ciał. PWN, Warszawa, 1977.

- [11] Brzęk M., Zagórowska M., Mitkowski W. The approximate location of imperfections in ellipse using the spectral theory. Measurment Automation Monitoring vol. 62, no. 4: 136-138, 2016.
- [12] Brzęk M., Zagórowska M., Mitkowski W. The approximate location of imperfection in a unit circle using spectrum of Laplace operator as a research tool. Automatyka vol. 60, no. 19: 9-15, 2015.
- [13] Brzęk M., Mitkowski W. Lokalizacja uszkodzeń w zadanym obszarze z wykorzystaniem teorii spektralnej. Pomiary, Automatyka, Kontrola, vol. 60, no. 1: 53-55, 2014.
- [14] Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. First English edition. Volume 1. Interscience Publishers, New York, 1953.
- [15] Damle A., Peterson G. C. Understanding the Eigenstructure of Various Triangles. SIAM Undergraduate Research Online, Volume 3, Issue 1, http://www.siam.org/students/siuro/vol3/S01061.pdf: 187-208, 2010.
- [16] Dan H. E. Eddy Current Testing Theory and Practice. American Society for Nondestructive Testing, 1995.
- [17] Davis J. M. Advanced Ultrasonic Flaw Sizing. The Art Room Corp., 1998.
- [18] Doebling S. W., Farrar C., Prime M. B., Daniel W. S. Damage Identification and Health Monitoring of Mechanical Systems from Changes of their Vibration characteristics. A literature review. Los Alamos National Laboratory: 1-127, 1996.
- [19] Evans L. C. Partial Differential Equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [20] Evans L. C., Gariepy R. F. Measure Theory and Fine Properties of Functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [21] Farlow S. J. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Revised reprint of the 1982 original. Dover Publications, Inc., New York, 1993.

- [22] Fisz M. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa, 1967.
- [23] Fokas A. S., Kalimeris K. Eigenvalues for the Laplace Operator in the Interior of an Equilateral Triangle. Springer, Computational Methods and Function Theory, Volume 14, Issue 1: 1–33, 2014.
- [24] I. M. Gelfand I. M. Normierte Ringe, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., Volume 9(51), Number 1: 3–24, 1941.
- [25] Golis M. J. An introduction to nondestructive testing. American Society for Nondestructive Testing. 1991.
- [26] Grebenkov D. S., Nguyen B. T. Geometrical structure of Laplacian eigenfunctions. SIAM REVIEW, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 55, No. 4: 601–667, 2013.
- [27] Grzanek M., Szulc K. Application of topological derivative and neural networks for inverse problem. System Modeling and Optimization, IFIP Advances in Information and Communication Technology, Springer Boston, Vol.312: 268-281, 2009.
- [28] Grzanek M., Laurian A., Szulc K. Numerical algorithms for an inverse problem in shape optimization. 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Journal of Physics: Conference series, Vol. 135: 12-47, 2008.
- [29] Górniewicz L., Ingarden R. S. Analiza matematyczna dla fizyków. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1981.
- [30] Halmos P. R. Measure theory. D. Van Nostrand Company, 1950.
- [31] Jackowska-Strumiłło L., Sokołowski J., Żochowski A., Henrot A. On Numerical Solution of Shape Invers Problem. Computational Optimization and Application, 23: 231-255, 2002.
- [32] Jackson Ch. N. Jr., Sherlock Ch. N., Moore P. O. Nondestructive Testing Handbook: Volume 1, Leak Testing. American Society of Nondestructive Testing, Columbus, OH.
- [33] Jakubowski J., Sztencel R, Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. Wydanie III. SCRIPT, Warszawa 2004.

- [34] Kabanikhin S. I. Inverse and ill-posed problems: theory and applications. Walter De Gruyter, 2011.
- [35] Kabanikhin S. I. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, Volume 16, Issue 4: 317–357, 2008.
- [36] Kac M. Can one hear the shape of a drum? Part II, The American Mathematical Monthly 73 (4): 1–23, 1966.
- [37] Karbhari V. M. Non-Destructive Evaluation (NDE) of Polymer Matrix Composites. Techniques and applications. Woodhead Publishing, 2013
- [38] Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer, 1996.
- [39] Koronacki J., Mielniczuk J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, Polska, 2006.
- [40] Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Application. John Wiley and Sons, 1989.
- [41] Kubrusly C. S. Hilbert Space Operators. A Problem Solving Approach. Birkhauser Boston, 2003.
- [42] Laugesen R. S. Spectral Theory of Partial Differential Equations. Lecture Notes. Department of Mathematics. University of Illinois at Urbana-Champaign, U.S.A. March 13, 2012.
- [43] Laugesen R. S., Siudeja B. A. Sums of Laplace eigenvalues—rotationally symmetric maximizers in the plane. Journal of Functional Analysis, Volume 260, Issue 6: 1795-1823, 2011.
- [44] Laptev A. Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces. J. Funct. Anal. 151, no. 2: 531-545, 1997.
- [45] Laurain A., Szulc K. Using Self-adjoint Extensions in Shape Optimization. Proceedings of the 23rd IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization, IFIP Advances in Information and Communication Technology, Vol. 312: 331-349, 2009.

- [46] Lawrence C. E. Równania różniczkowe cząstkowe. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.
- [47] Lipnicka M. Approximate localisation of imperfections in fixed domain. Journals of the Polish Mathematical Society. Vol 39, No 2: 47-78, 2011.
- [48] Liu G. R., Han X. Computational Inverse Techniques in Nondestructive Evaluation. CRC Press, June 27, 2003.
- [49] Louis C. Nondestructive Testing. ASM International, Materials Park, Ohio, 1995.
- [50] Lovejoy D. Penetrant Testing. Chapman and Hall, 1991.
- [51] Majchrowski M. Równania różniczkowe cząstkowe i ich zastosowania konspekt wykładu. Warszawa, 2005.
- [52] Matlab. Partial differential equation toolbox. User's guide. The Math Works, Inc. www.mathworks.com.
- [53] McCartin B. J. Eigenstructure of the Equilateral Triangle, Part I: The Dirichlet Problem. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM Review Vol. 45, No. 2: 267-287, 2003.
- [54] Mendrok K. Porównanie metod wykrywania uszkodzeń w aspekcie możliwości ich automatyzacji. Diagnostyka '3(43): 83-92, 2007.
- [55] Neto F. D. M., Neto A. J. da S. An Introduction to Inverse Problems with Applications. Springer, 2012.
- [56] Nowosielska K., Kowalczyk P. Wykrywanie, lokalizacja i identyfikacja uszkodzeń w wysoko wytrzymałych konstrukcjach kompozytowych. Prace Instytutu Lotnictwa Nr 194 – 195: 83-111, 2008.
- [57] Prager M. Eigenvalues and eigenfunctions of the Laplace operator on an equilateral triangle. Applications of Mathematics. No. 43: 311-320, 1998.
- [58] Pułaska-Turyna B. *Statystyka dla ekonomistów.* Difin SA, Warszawa, 2011.
- [59] Ramesh G. Lecture notes on Spectral Theorem for Compact Self-adjoint Operators. National Institute of Technology Karnataka, Surathkal, 2013.

- [60] Rudin W. Analiza funkcjonalna. PWN Wydawnictwo Naukowe, 2001.
- [61] Scott I. G. Basic Acoustic Emission. Gordon and Breach Science Publishers, New York, NY, 1991.
- [62] Shull P.J. Nondestructive Evaluation Theory, Applications, and Applications. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [63] Uhl T. Współczesne metody monitorowania i diagnozowania konstrukcji. Wyd. Fundacja im. Wojciecha Świętosławskiego na Rzecz Wspierania Nauki i Rozwoju Potencjału Naukowego w Polsce, Gliwice: 193-254, 2010.
- [64] Urbański P. Lecture notes. Analiza Funkcjonalna II (2015/2016). http://www.fuw.edu.pl/ urbanski/AnFun_ IIa.pdf.
- [65] Walesiak M., Gatnar E. Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R. PWN, Warszawa, Polska, 2009.
- [66] Wikipedia, https://pl.wikipedia.org
- [67] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. The Finite Elemnent Method. Fifth Ediition. Volume 1: The Basis. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [68] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. The Finite Elemnent Method. Fifth Ediition. Volume 2: Solid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [69] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. The Finite Elemnent Method. Fifth Ediition. Volume 3: Fluid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2000.