



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

---

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I INŻYNIERII  
BIOMEDYCZNEJ

KATEDRA AUTOMATYKI I ROBOTYKI

## **ROZPRAWA DOKTORSKA**

**STEROWANIE PROCESAMI SILNIE NIELINIOWYMI**

**W CZASIE RZECZYWISTYM**

**Autor:**

**mgr inż. Andrzej Latocha**

Promotor:

Prof. dr hab. inż. Witold Byrski

Kraków 2019



**AGH** UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY  
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING, AUTOMATICS, COMPUTER SCIENCE  
AND BIOMEDICAL ENGINEERING  
DEPARTMENT OF AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS

## **DOCTORAL THESIS**

**CONTROL OF STRONGLY NONLINEAR PROCESSES IN REAL TIME**

**Author:**

**mgr inż. Andrzej Latocha**

Supervisor:

Prof. dr hab. inż. Witold Byrski

Kraków 2019



Składam podziękowania promotorowi  
oraz zespołowi pracowników naukowych  
Katedry Automatyki i Robotyki AGH za konstruktywne wskazówki.





## Streszczenie

W rozprawie doktorskiej pod tytułem „Sterowanie procesami silnie nieliniowymi w czasie rzeczywistym” rozważono zastosowanie regulatora liniowo kwadratowego do sterowania systemów nieliniowych, silnie nieliniowych oraz systemów opisanych funkcjami nieróżniczkowalnymi. Celem badawczym było opracowanie zaawansowanych algorytmów sterowania, ich implementacja oraz weryfikacja zarówno w środowisku symulacyjnym, jak również w systemach sterowania czasu rzeczywistego o twardych kryteriach czasowych na wykonanie obliczeń. Rozprawa doktorska miała na celu weryfikację następujących hipotez badawczych:

- Możliwe jest zbudowanie obserwatora stanu, który będzie posiadał własności uśredniania, minimalizujące średniokwadratowy błąd estymacji dla wybranych klas skończenie wymiarowych nieliniowych SISO systemów dynamicznych w zadaniu stabilizacji.
- Możliwe jest opracowanie algorytmu budowy regulatora stabilizującego czas rzeczywisty, dla wybranych klas skończenie wymiarowych nieliniowych SISO systemów dynamicznych.

Na wstępie rozprawy przedstawiono stosowane rozwiązania w sterowaniu systemów nieliniowych, wyszczególniono literaturę, która opisuje stan badań dla zagadnień sterowania nieliniowego, przedstawiono klasyczną metodologię linearyzacji systemów nieliniowych w problemie sterowania nieliniowego. Przeprowadzono syntezę literatury opisującej klasyczne podejście do sterowania systemów nieliniowych oraz problemy implementacji rozwiązań standardowych.

Zaproponowano nowe podejście do linearyzacji systemów nieliniowych, silnie nieliniowych oraz systemów opisanych funkcjami nieróżniczkowalnymi poprzez rzutowanie dynamiki modelu nieliniowego w otoczeniu punktu referencyjnego na model liniowy filtru impulsowego o nieskończonej odpowiedzi z wykorzystaniem zmodyfikowanego algorytmu najmniejszych kwadratów. W zaproponowanym podejściu do linearyzacji systemów nieliniowych, silnie nieliniowych oraz systemów opisanych funkcjami nieróżniczkowalnymi wykorzystano własności korygujące obserwatorów o wysokim wzmocnieniu. Zaproponowano rozszerzenie zagadnienia własności korygujących obserwatorów o wysokim wzmocnieniu poprzez wprowadzenie współczynników korekcyjnych na sterowanie i stałe czasowe w problemie Ackermanna, optymalizacji obserwatora dla systemu o jednym wejściu i jednym wyjściu.

W dalszej kolejności praca skupia się na projektowaniu układów sterowania z wykorzystaniem regulatora liniowo-kwadratowego w pętli sprzężenia zwrotnego z obserwatorem linearyzującym uśredniającym o wysokim wzmocnieniu. Korekcję modelu zlinearyzowanego zastosowaną w algorytmie Ackermanna, optymalizacji obserwatora uwzględniono również w algebraicznym równaniu Riccatiiego optymalizacji regulatora liniowo kwadratowego na nieskończonym horyzoncie. Wykonano eksperymenty symulacyjne na szerokiej klasie systemów nieliniowych i silnie nieliniowych dla zadania stabilizacji systemu, na który oddziałują zakłócenia addytywne w różnych stanach pracy, oraz w zadaniu sterowania po trajektorii referencyjnej. Następnie przeprowadzono badania na laboratoryjnym stanowisku lewitacji magnetycznej, które potwierdziły wyniki eksperymentów symulacyjnych.

Wyniki przeprowadzonych prac badawczych oraz eksperymentów laboratoryjnych potwierdziły postawione hipotezy badawcze oraz wskazały nowe kierunki badań. W pracy wykazano, że dokładna estymacja stanu jest ważna w sterowaniu liniowo-kwadratowym systemów nieliniowych, silnie nieliniowych oraz systemów opisanych funkcjami nieróżniczkowalnymi, ale nie jest kluczowa, kluczowe znaczenie ma trend estymat stanu, który w pracy formowany jest obserwatorem o wysokim wzmocnieniu. W pracy wykazano, że możliwa jest estymacja informacji o stanie systemu nieliniowego, silnie nieliniowego oraz systemu opisanego funkcjami nieróżniczkowalnymi funkcją skończenie wymiarową z akceptowalnym poziomem błędów w zadaniu sterowania liniowo-kwadratowym.



## Abstract

In the doctoral thesis entitled "Control of Strongly Non-Linear Processes in Real Time", the use of a linear-square regulator to control nonlinear systems, strongly nonlinear systems and systems described by non-differentiable functions was considered. The research goal was to develop, implement and verify advanced control algorithms, both in the simulation environment as well as in real-time control systems with hard time criteria for calculations. The doctoral thesis was aimed at verifying the following research hypotheses:

- It is possible to build a state observer, which will have averaging properties, that minimizes the mean square error of estimation for selected classes of nonlinear SISO dynamic systems in the stabilization task.

- It is possible to develop an algorithm for the construction of a real-time stabilizing controller for selected classes of finitely dimensional nonlinear SISO dynamic systems.

At the beginning of the dissertation, the solutions applied for the control of nonlinear systems were presented. The literature describing the state of research on nonlinear control problems and the classical methodology of the linearization of nonlinear systems for the problem of nonlinear control was presented. A synthesis of the literature describing the classical approach to the control of nonlinear systems and the problems of implementing standard solutions was conducted.

A new approach to the linearization of nonlinear systems, strongly nonlinear systems and systems described by non-differentiable functions was proposed by projecting the dynamics of the nonlinear model around the reference point into a linear model of an impulse filter with an infinite response by using a modified least squares algorithm. In the proposed approach to the linearization of nonlinear and highly nonlinear systems and systems described by non-differentiable functions, the corrective properties of high-gain observers were used. Extending the corrective properties of high-gain observers by introducing corrective factors into the control and time constants in the Ackermann problem, observer optimization for a one-input, and one output system was proposed.

Next, the work focused on the design of control systems using a linear quadratic regulator in the feedback loop with a linearization averaging observer with high gain. In addition to the correction of the linearized model used in the Ackermann algorithm, the observer optimization was included in the algebraic Riccati equation of optimization of the linear-square regulator on the infinite horizon. Simulation experiments were carried out on a wide range of classes of nonlinear and strongly nonlinear systems for the task of stabilizing the system, which is affected by additive disturbances in various operating states, and for the task of control after the reference trajectory. Tests were then carried out in a laboratory magnetic levitation station that confirmed the results of the simulation experiments.

The results of the research and laboratory experiments confirmed the research hypotheses and indicated new directions for research. The study shows that accurate state estimation is important in linear-quadratic control of nonlinear and strongly nonlinear systems and systems described by non-differentiable functions, but that it is not crucial. The crucial element is the trend of the state estimates, which will be formed in the work by a high-gain observer. The paper shows that it is possible to estimate information about the state of nonlinear and strongly nonlinear systems and a system described by non-differentiable functions by using a finite-dimensional function with an acceptable level of error in a linear-quadratic control task.



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>5</b>
1.1	Cel naukowy . . . . .	6
1.2	Uzasadnienie celowości i ważności badań w obszarze systemów nieliniowych . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Tezy rozprawy</b>	<b>7</b>
2.1	Podstawa teoretyczna . . . . .	7
2.2	Tezy . . . . .	8
2.3	Prognozowane obszary zastosowań . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Klasyczne metody sterowania</b>	<b>9</b>
3.1	Regulatory czasowo optymalne . . . . .	10
3.1.1	Klasyczny układ regulacji PID . . . . .	10
3.1.2	Kaskadowy układ regulacji . . . . .	11
3.1.3	Układ ze sprzężeniem do przodu w torze zakłócenia . . . . .	11
3.1.4	Układ ze sprzężeniem do przodu w torze nadążania . . . . .	11
3.1.5	Struktura regulacji z modelem wewnętrznym . . . . .	12
3.1.6	Zmodyfikowana struktura regulacji z modelem wewnętrznym . . . . .	12
3.2	Regulator od stanu . . . . .	13
3.3	Estymacja zmiennych stanu . . . . .	16
3.3.1	Obserwator liniowy . . . . .	16
3.3.2	Filtr Kalmana . . . . .	18
3.3.3	Dyskretny Filtr Kalmana . . . . .	19
3.3.4	Rozszerzony Filtr Kalmana EKF . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Sterowanie systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi</b>	<b>24</b>
4.1	Silna nieliniowość . . . . .	24
4.2	Linearyzacja systemów nieliniowych i silnie nieliniowych . . . . .	25
4.2.1	Linearyzacja statyczna Taylora . . . . .	25
4.2.2	Linearyzacja dynamiczna Taylora . . . . .	26
4.2.3	Sformułowanie problemu linearyzacji IIR-MA . . . . .	28
4.2.4	Model estymatora systemu nieliniowego . . . . .	29
4.2.5	Estymator najmniejszych kwadratów . . . . .	29
4.2.6	Liniowy estymator bloku nieliniowego . . . . .	31
4.2.7	Liniowy estymator systemu nieliniowego . . . . .	32
4.2.8	Eksperymenty numeryczne . . . . .	35
4.3	Linearyzujące sprzężenie zwrotne . . . . .	38
4.4	Regulator LQR w sterowaniu systemu nieliniowego i silnie nieliniowego . . . . .	39
4.5	Obserwator o wysokim wzmocnieniu . . . . .	41
4.6	Zastosowanie obserwatora o wysokim wzmocnieniu . . . . .	43
4.7	Sterowanie modelami nieliniowymi Hammersteina-Wienera . . . . .	48
4.7.1	Model z nieliniowością na wyjściu . . . . .	48
4.7.2	Model z nieliniowością na wejściu . . . . .	52
4.7.3	Model z nieliniowością na wejściu i wyjściu . . . . .	55
4.7.4	Podsumowanie eksperymentów na modelach Hammersteina-Wienera . . . . .	58
4.8	Sterowanie modelem Hammersteina-Wienera z linearyzacją ARMAX . . . . .	59
4.9	Sterowanie nieliniowym systemem oscylacyjnym . . . . .	62

---

4.10	Sterowanie nieliniowym modelem niestabilnym z linearyzacją ARMAX . . . . .	67
4.11	Sterowanie systemem nieliniowym z histerezą, linearyzacją ARMAX przy ograniczeniu na sterowanie . . . . .	70
4.12	Sterowanie laboratoryjnym modelem lewitacji magnetycznej z linearyzacją ARMAX . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Linearyzacja systemów z uszkodzeniami</b>	<b>82</b>
5.1	Algorytm predykcyjny do szacowania i wstępnej korekcji usterek systemu nieliniowego	82
5.2	Eksperymenty numeryczne FD . . . . .	83
5.3	Rekurencyjny algorytm rekonstrukcji uszkodzonych danych . . . . .	84
5.4	Eksperymenty numeryczne FDIR . . . . .	85
5.5	Wnioski dotyczące linearyzacji systemów z uszkodzeniami . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Obserwator nieliniowy</b>	<b>88</b>
6.1	Obserwator nieliniowy w sterowaniu LQR . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Filtry adaptacyjne</b>	<b>91</b>
7.1	Sformułowanie problemu filtracji dla estymatora jądrowego . . . . .	91
7.2	Funkcja filtrująca . . . . .	92
7.3	Rekurencyjny algorytm filtrowania . . . . .	93
7.4	Optymalizacja operatora przesunięcia danych . . . . .	96
7.5	Bezpośredni algorytm filtrowania . . . . .	96
7.6	Eksperymenty numeryczne filtracji adaptacyjnej . . . . .	96
7.6.1	Porównanie własności filtrujących Filtru Kalmana i proponowanego algorytmu filtracji . . . . .	96
7.6.2	Filtracja sygnału procesowego z laboratoryjnej kolumny destylacyjnej . . . . .	98
7.7	Wnioski do filtracji adaptacyjnej . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Implementacja w strukturach sterowania</b>	<b>100</b>
8.1	Warstwowe struktury sterowania . . . . .	100
8.2	Systemy sterowania w technologii embedded . . . . .	101
<b>9</b>	<b>Wnioski</b>	<b>104</b>
9.1	Wnioski dotyczące sterowania systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi . . . . .	105
9.2	Nowatorskie elementy pracy . . . . .	105
9.3	Najważniejsze oryginalne wyniki pracy wnoszące istotne, nowe treści do rozwoju nauki	106
9.4	Proponowane kierunki badawcze . . . . .	108
<b>10</b>	<b>Dodatek A</b>	<b>109</b>

## Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$\mathbb{R}$	Zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}^n$	Rzeczywista przestrzeń euklidesowa $n$ wymiarowa z normą
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Zbiór macierzy rzeczywistych $m$ na $n$ wymiarowych
$\mathbb{N}$	Zbiór liczb naturalnych z zerem ( $0 \in \mathbb{N}$ )
$A, B, C, D$	Macierze równań stanu
$\det(A)$	Wyznacznik macierzy $A$
$\text{rank}(\Omega)$	Wymiar macierzy
$\text{Ker}(\Omega)$	Jądro macierzy
$\lambda(A), \text{eig}(A)$	Widmo macierzy $A$
$\lambda_i(A)$	$i$ -ta wartość własna macierzy $A$
$\tau_i$	$i$ -ta stała czasowa systemu dynamicznego
$\tau_{cr}$	Współczynnik korekcji stałych czasowych obserwatora
$\beta$	Współczynnik korekcji wzmocnienia obserwatora
$W(\lambda)$	Wielomian charakterystyczny
$A \geq 0$	Macierz dodatnio określona, $\forall x \neq 0, x^T A x > 0$
$\hat{x}(t)$	Estymator wartości stanu $x$ w chwili $t$
$\tilde{u}$	Wartość skorygowana
$\varepsilon$	Błąd estymacji
$e$	Błąd wartości
$EX, \mu$	Wartość oczekiwana zmiennej losowej $X$
$\bar{X}$	Średnia z próby losowej $X$
$MSE$	Błąd średnio-kwadratowy dla próby losowej $X$
$J$	Wskaźnik jakości lub funkcja kosztu
$Q, R$	Macierze wagowe w kwadratowym wskaźniku jakości
$\Omega_s$	Macierz sterowalności liniowego systemu dynamicznego
$\Omega_o$	Macierz obserwowalności liniowego systemu dynamicznego
$x(k), u(k), y(k)$	Wektor stanu, sygnał wejściowy, sygnał wyjściowy systemu dynamicznego z czasem dyskretnym
$x(t), u(t), y(t)$	Wektor stanu, sygnał wejściowy, sygnał wyjściowy systemu dynamicznego z czasem ciągłym
$LSE$	Estymacja Najmniejszych Kwadratów
$\Phi$	Macierz wartości
$\theta$	Macierz współczynników
$U$	Wektor wartości sygnału wejścia
$Y$	Wektor wartości sygnału wyjścia
$1(t)$	Sygnał: skok jednostkowy
$\delta(t)$	Sygnał: Delta Diraca
$G(s)$	Funkcja operatorowa (transmitancja) z czasem ciągłym
$G(z)$	Funkcja operatorowa (transmitancja) z czasem dyskretnym
$G_0$	Model referencyjny lub wzorcowy
	Oznaczenia w dowodach matematycznych źródeł cytowanych zamieszczono w oryginalnej formie.



---

# 1 Wstęp

Rozwój technologii jest ściśle powiązany z zapewnieniem sterowania o coraz lepszych wskaźnikach jakości. W klasie systemów sterujących można wyróżnić wiele typów regulatorów: dwustanowe, trójstanowe, dead-beat, regulatory ciągłe czasowo optymalne oraz regulatory liniowo-kwadratowe od zmiennych stanu systemu. W teorii sterowania znane są algorytmy projektowania regulatorów liniowo-kwadratowych LQR (ang. Linear Quadratic Regulator) dla liniowych systemów dynamicznych. Regulator LQR jest regulatorem optymalnym na trajektoriach systemu liniowego w punkcie pracy. W obliczeniach regulatora LQR nie uwzględnia się opóźnień transportowych sygnału sterującego i sygnału pomiarowego, nieliniowości i niepewności modelu. Powoduje to, że w systemach fizycznych zadanie stabilizacji przy pomocy klasycznego algorytmu obliczeniowego regulatora LQR jest obarczone istotnymi błędami. Większość systemów sterowania to systemy nieliniowe, niez izolowane z niepewnością modelu. Praca powstała na bazie doświadczeń zawodowych autora przy wdrożeniu sterowania przemysłowymi systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi [Latocha (1998)], projektowaniu filtrów adaptacyjnych dla pewnych klas zakłóceń niesymetrycznych [Latocha (2013)], algorytmów sterowania adaptacyjnego [Latocha (2011b)], [Latocha (2016)], [Latocha (2017)], algorytmów identyfikacji systemów dynamicznych [Latocha (2018a)] oraz algorytmów diagnostyki procesów [Latocha (2018b)]. Podjęto tematykę badawczą obliczenia regulatora LQR uśredniającego na skończonym przedziale czasu dla systemu silnie nieliniowego spełniającego warunek sterowalności w sensie wejścia/wyjścia. Ograniczona zmiana sygnału wejściowego powoduje ograniczoną zmianę sygnału na wyjściu systemu BIBO (ang. Bounded Input Bounded Output). Wśród systemów nieliniowych dużą klasę stanowią systemy, które nie posiadają lokalnego punktu równowagi. Do postawionego problemu badawczego sformułowano założenia i zaproponowano algorytm obliczeniowy zaprezentowany na międzynarodowej konferencji NDC 2017 (ang. International Conference on Nonlinear Dynamics and Complexity) [Latocha (2017)]. Podejście klasyczne bazujące na równaniach różniczkowych zawęża klasę rozwiązań do systemów dobrze poznanych i opisanych, nie gwarantując stabilności numerycznej ze względu na nieliniowości wynikające z niepewności modelu, błędy obliczeń numerycznych oraz skończenie wymiarową reprezentację modelu matematycznego. Opis nieliniowymi równaniami różniczkowymi systemów fizycznych jest dużym przybliżeniem. Często spotyka się systemy o silnych nieliniowościach [Browder (1964)], [Lions (1965)]. Uwzględniając powyższe uwarunkowania zaproponowano uogólnione podejście do zagadnień sterowania systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi, bazujące na uśrednionej skorygowanej liniowej estymacji modelu dynamiki systemu nieliniowego o jednym wejściu i jednym wyjściu SISO w otoczeniu punktu referencyjnego. Dla powyższych założeń można wyliczyć obserwator w linearyzującym sprzężeniu zwrotnym i regulator LQR. W pracy przyjęto konwencję stosowaną w fizycznych systemach sterowania polegającą na tym, że dane wprowadzane do obliczeń są danymi dyskretnymi, na których wykonywane są obliczenia wstępne. Wyniki obliczeń wstępnych konwertowane są do dziedziny czasu ciągłego, w której wykonywane są obliczenia zaawansowane. Zastosowanie modeli czasu ciągłego implementowanych w komputerowych systemach sterujących klasy PC lub PLC [Opředkiewicz et al. (2017)], które przetwarzają dane w dyskretnych krokach czasu nieznacznie pogarsza wskaźniki jakości. W wymienionych klasycznych systemach obliczeniowo-sterujących czasu rzeczywistego, ze względu na priorytety wykonywania zadań, zasoby sprzętowe nie gwarantują zapewnienia wysokiej precyzji synchronizacji obliczeń czasie, która jest wymagana do wykonania obliczeń dyskretnych z akceptowalnym poziomem błędu. Zastosowanie modeli z czasem ciągłym pozwala na zastosowanie algorytmów w klasycznych systemach procesowych z klasycznymi systemami sterującymi i wykonawczymi bez konieczności stosowania drogich rozwiązań synchronizacji i dystrybucji sterowania dyskretnego, dedykowanych protokołów sterująco-synchronizujących, dedykowanych układów wykonawczych stosowanych w technice napędowej o sztywnych charakterystykach dynamicznych.

## 1.1 Cel naukowy

Celem naukowym dysertacji jest opracowanie i praktyczna weryfikacja nowych algorytmów projektowania regulatorów stabilizujących dla systemów dynamicznych o charakterystykach silnie nieliniowych. Dla rozwiązań czasu rzeczywistego warunkami koniecznymi, które powinien spełniać regulator, są: stabilność systemu w zamkniętej pętli sterowania, odporność na zmiany modelu (ang. robust), odporność na zakłócenia procesowe, optymalność, możliwość adaptacji. Czas wyliczania sterowania i jego aplikacja w relacji do dynamiki sterowanego systemu nie powinny generować niepożądanych efektów zakłócających pracę systemu czasu rzeczywistego. Prezentowane w pracy rozwiązania algorytmów sterowania procesami odnoszą się do systemów o podwyższonej niezawodności działania klasy PLC, których dostępne zasoby i moce obliczeniowe są ograniczone.

## 1.2 Uzasadnienie celowości i ważności badań w obszarze systemów nieliniowych

Opracowywanie wydajnych i niezawodnych algorytmów sterowania procesami nieliniowymi o znaczącej niepewności lub silnie nieliniowymi jest jednym z najważniejszych tematów badawczych teorii i praktyki w automatyce. Wszystkie rzeczywiste systemy dynamiczne są systemami nieliniowymi, nie izolowanymi, nieskończenie wymiarowymi. Analiza nieliniowych układów sterowania oraz regulacji jest trudna ze względu na brak w wielu przypadkach analitycznych postaci rozwiązań równań stanu układu dynamicznego. Najczęściej stosowaną metodą jest metoda linearyzacji modelu matematycznego układu nieliniowego wokół wybranego punktu pracy w przestrzeni stanów. Linearyzację wykorzystuje się przy badaniach lokalnej stabilności, lokalnej obserwowalności oraz lokalnej sterowalności układów nieliniowych [Klamka (2011)]. Sterowanie najczęściej odbywa się w ustalonych punktach pracy systemu, przy założeniu stacjonarności jego parametrów, niewielkich odchyłkach sterowania i zmiennych stanu. W podejściu klasycznym poprzez linearyzację bazującą na rozwinięciu w szereg Taylora można otrzymać modele liniowe w punkcie pracy, które z akceptowanym poziomem błędów można zastosować do projektowania regulatorów liniowych dla systemów liniowych oraz systemów nieliniowych o nieliniowościach wolno zmiennych w relacji do możliwości dyskretyzacji. Teoria dotycząca systemów liniowych jest dobrze poznana, opisana i kompletna. Otwartym zagadnieniem badawczym pozostaje tematyka dotycząca sterowania systemami silnie nieliniowymi w większych obszarach pracy, w czasie rzeczywistym przy ograniczonych zasobach obliczeniowych i ograniczonej energii sterowania. Z powyższych uwarunkowań wynika konieczność prowadzenia prac badawczych nad systemami silnie nieliniowymi, opracowanie algorytmów projektowania i budowy regulatorów dynamicznych, które pozwolą uzyskać regulację wysokiej jakości i jednocześnie zagwarantować pewność działania w czasie rzeczywistym.

---

## 2 Tezy rozprawy

### 2.1 Podstawa teoretyczna

Szybki rozwój algorytmów sterowania można obserwować w klasie metod wywodzących się z nowoczesnej teorii sterowania w tym regulacji liniowej z kwadratowym wskaźnikiem jakości. Zastosowanie regulacji liniowej z kwadratowym wskaźnikiem jakości w odniesieniu do systemów sterowanych regulatorem PID pozwala na optymalizację kosztów sterowania, zapewnienie wysokiej precyzji, pozbawione jest pamięci układu, co jest wadą regulatorów PID. Moduł całkujący regulatora PID dostrojony do częstotliwości własnych obiektu przy zakłóceniu o dużej amplitudzie i krótkim czasie trwania powoduje naliczenie dużej wartości, która może spowodować wejście regulatora rzeczywistego w stan nasycenia, charakteryzującego się wygenerowaniem sterowania, które osiągnie wartość ograniczenia przez dłuższy czas, pomimo że zakłócenie przestało oddziaływać na system. Stan nasycenia regulatora PID może prowadzić do oscylacji lub destabilizacji systemu. Regulator liniowo-kwadratowy-Gaussowski (LQG, ang. Linear-Quadratic-Gaussian) jest regulatorem od stanu bazującym na problemie sterowania liniowo-kwadratowego LQR z filtrem Kalmana jako obserwatorem stanu. Dotyczy on systemów liniowych działających w warunkach niepewności modelu, narażonych na zakłócenia addytywne, biały szum Gaussa, z niepełną informacją o stanie oraz poddanych optymalizacji z wykorzystaniem kwadratowego wskaźnika jakości. Rozwiązanie problemu sterowania optymalnego jest jednoznaczne przy pewnych warunkach i określa sterowanie dla dynamicznego układu liniowego ze sprzężeniem zwrotnym, które można obliczyć za pomocą komputera i zaimplementować w systemach sterujących. Regulator LQG może być również bazowym rozwiązaniem dla optymalnego sterowania układami nieliniowymi, które poddawane są działaniu zakłóceń. Zagadnieniem, które wymaga rozwiązania w sterowaniu systemów nieliniowych, jest problem precyzyjnej estymacji dynamiki systemu nieliniowego na szerszym horyzoncie, poza klasyczną linearyzacją punktową, która nie zawiera informacji o szerszym otoczeniu wokół punktu linearyzacji. Otoczenie punktu linearyzacji jest obszarem zmiennych stanu pracy regulatora, w którym regulator kompensuje zakłócenia. W tym otoczeniu system powinien spełniać warunek sterowalności. W systemach nieliniowych i silnie nieliniowych wartość wektora sterowania wyliczanego z wykorzystaniem klasycznych algorytmów LQG poza punktem linearyzacji może być obciążona nieakceptowanym poziomem błędów w zadaniu stabilizacji. Obliczenie regulatora LQG na przedziale nieliniowości, który spełnia warunek sterowalności systemu, jest jednym z najważniejszych problemów badawczych. Kolejnym bardzo ważnym problemem badawczym jest filtracja zakłóceń procesowych o dystrybucji niepodlegającej prawom Gaussa. W związku z powyższym na podstawie dowodów matematycznych o istnieniu rozwiązania problemu regulatora liniowego dla pewnych klas systemów nieliniowych [Grabowski (2011)], [Grabowski (2013)], [Grabowski (2017)], [Ahmed (1977)], [Browder (1964)], [Corn (2007)], [Huang et al. (2008)], [Julier and Uhlmann (2004)], [Khalil (1996)], [Khalil (2015)], [Sastry (1999)], [Slotine and Li (1991)], [Duda (2017)] postawiono tezy o możliwości zbudowania układu regulacji posiadającego własności uśredniające [Latocha (2017)], [Latocha (2018a)], [Latocha (2018b)] w otoczeniu punktu referencyjnego. Na podstawie dowodów matematycznych o istnieniu obserwatorów korygujących dla systemów niepewnych i nieliniowych zawartych w pracach [Khalil (2015)], [Khalil and Hassan (2017)], [Lewis (1986)], [Tan and Edwards (2002)], [Zheng et al. (2017)] postawiono tezę o możliwości zbudowania obserwatora stanu, którego estymaty będą zbieżne asymptotycznie do wartości uśrednionej.

## 2.2 Tezy

**Hipoteza 1.** *Możliwe jest zbudowanie obserwatora stanu, który będzie posiadał własności uśredniania, minimalizujące średniokwadratowy błąd estymacji dla wybranych klas skończenie wymiarowych nieliniowych SISO systemów dynamicznych w zadaniu stabilizacji.*

**Hipoteza 2.** *Możliwe jest opracowanie algorytmu budowy regulatora stabilizującego czas rzeczywisty dla wybranych klas skończenie wymiarowych nieliniowych SISO systemów dynamicznych.*

## 2.3 Prognozowane obszary zastosowań

Omawiany w pracy problem sterowania dotyczy systemów fizycznych, dla których projektowane są systemy sterujące o podwyższonej niezawodności działania, np. PLC itp. Dostrzegalnym trendem w systemach sterowania procesami jest dążenie do zapewnienia bezpieczeństwa (ang. Safety Integrated) i osiągnięcia lepszych wskaźników jakości. Realizacja wymienionych celów wiąże się nie tylko z wykonaniem sprzętowym systemów o podwyższonej niezawodności działania, ale również z formalizmem języków programowania zawartym w normach IEC 61131, zastosowaniem algorytmów obliczeniowych, w których zwraca się uwagę na uwarunkowania matematyczne i numeryczne zapewniające wysoką dokładność i stabilność obliczeń oraz zastosowaniem relacyjnych baz danych wspomaganie projektu CAE (ang. Computer Aided Engineering), systemów ekspertowych, które pomagają rozwiązywać złożone problemy w oparciu o reguły przetwarzania i analizy baz wiedzy.

---

### 3 Klasyczne metody sterowania

Sterowanie polega na takim oddziaływaniu na dany obiekt, aby osiągnąć określony cel. Samo sterowanie nie wiąże się zwykle bezpośrednio z wydatkiem energii, ma raczej postać sygnału informacyjnego. Efekty sterowania mogą być powiązane ze zmianami energii lub przemianami materii, ze zmianami stanu lub właściwościami obiektu. Koncepcje teorii sterowania, które znajdują współcześnie zastosowanie, można ująć w grupy:

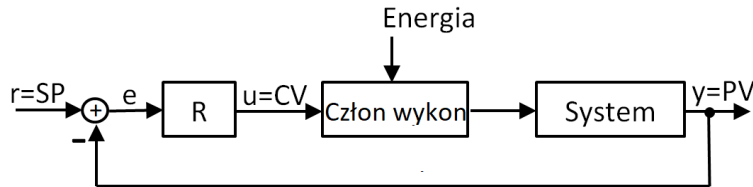
- grupa zagadnień związanych z zaawansowaniem metod sterowania PID: odsprzęganie PID, kompensacja czasu martwego, harmonogramowanie wzmocnienia, automatyczne dostrajanie regulacji PID.
- grupa metod wywodząca się z nowoczesnej teorii sterowania: regulacja LQG (ang. Linear Quadratic Gaussian), obserwatory stanu, filtr Kalmana, sterowanie predykcyjne (MPC, ang. Model Predictive Control), sterowanie adaptacyjne, sterowanie i analiza z normą H-nieskończoność, sterowanie powtarzalne, sterowanie ślizgowe, dokładna linearyzacja i sterowanie, sterowanie z optymalizacją, identyfikacja parametrów.

W rozdziale przedstawiono stan badań dla wybranych, najczęściej spotykanych rozwiązań stosowanych w sterowaniu systemów nieliniowych. Fundamentalna analiza teorii sterowania i stanu badań dla systemów nieliniowych została opisana w publikacjach: [Klamka (2002)], [Klamka (2011)], [Klamka et al. (2013)], [Klamka et al. (2015)], [Zak (2003)], [Ahmed (1977)], [Seborg et al. (1989)], [Slotine and Li (1991)], [Corn (2007)], [Franklin et al. (1990)], [Kailath (1980)], [Khalil (1996)], [Khalil (2015)], [Khalil and Hassan (2017)], [Sastri (1999)], [Curtain et al. (2017)], [Grabowski (2011)], [Grabowski (2013)], [Grabowski (2017)], [Figwer (2009)].

### 3.1 Regulatory czasowo optymalne

#### 3.1.1 Klasyczny układ regulacji PID

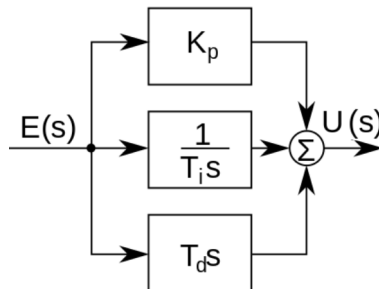
Klasyczny układ regulacji PID posiada strukturę jak na rysunku (Rys. 1), może być opisany równaniem jawnym funkcji czasu (1) lub równaniem operatorowym (2) (Rys. 2).



Rysunek 1: Schemat klasycznej struktury regulacji z regulatorem PID.

$$u(t) = Ke(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = \frac{K_p T_i s + 1 + T_d T_i s^2}{T_i s} \quad (2)$$

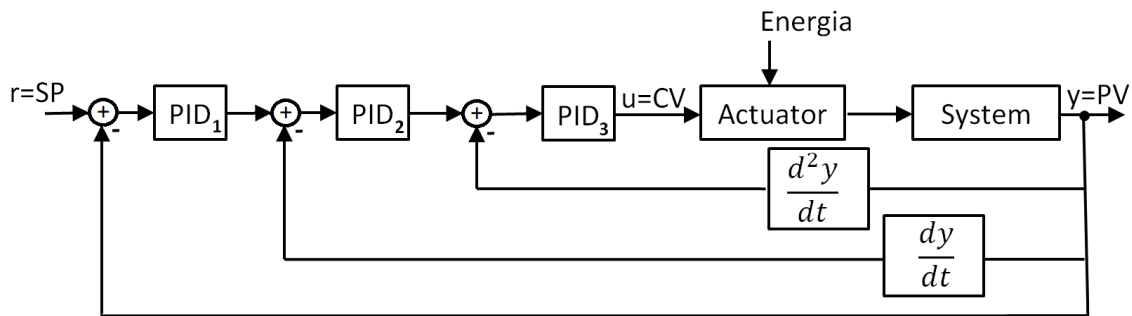


Rysunek 2: Schemat blokowy regulatora PID w formie operatorowej.

Regulator PID jest regulatorem nadążnym, minimalizującym błąd regulacji w funkcji czasu. Regulatory PID są wykorzystywane do stabilizacji systemów w punkcie pracy oraz do regulacji nadążnej, śledzącej trajektorię sygnału referencyjnego (ang. Tracking). Przyjmuje się, że zakres regulacji dla optymalnych nastaw regulatora nie powinien przekraczać 10% odchyłki od wartości referencyjnej. Poza preferowanym zakresem wskaźniki jakości regulacji ulegają znaczącemu pogorszeniu. Idealny regulator PID reprezentuje człon nieprzyczynowy. W zastosowaniach przemysłowych spotyka się modyfikacje regulatora PID z ograniczeniami. Klasyczne systemy jednoregulatorowe można dostroić do zakłóceń o określonej wariancji i charakterystyce spektralnej.

### 3.1.2 Kaskadowy układ regulacji

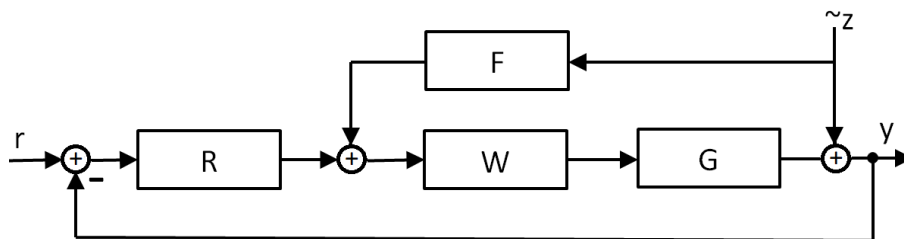
W złożonych systemach zależnych spotyka się kaskadowe układy regulacji, które mają na celu poprawę dynamiki regulacji. Wyjście regulatora wiodącego wprowadza wartość referencyjną do kolejnego regulatora sterującego. Kaskadowe sprzężenia zwrotne najczęściej stosuje się od wielkości szybkozmiennych (regulator  $PID_3$ ) w torze sterowania, najkrótsza pętla regulacji oznaczona funkcją  $\frac{d^2y}{dt^2}$  (Rys. 3), poprzez wielkości o mniejszej dynamice zmian (środkowa pętla regulacji oznaczona funkcją  $\frac{dy}{dt}$ ), do głównej pętli regulacji-stabilizacji wartości referencyjnej. Sygnały w kaskadowym układzie regulacji mogą pochodzić od zmiennych stanu (Rys. 3) lub od wartości procesowych systemu o różnej dynamice.



Rysunek 3: Kaskadowy układ regulacji PID.

### 3.1.3 Układ ze sprzężeniem do przodu w torze zakłócenia

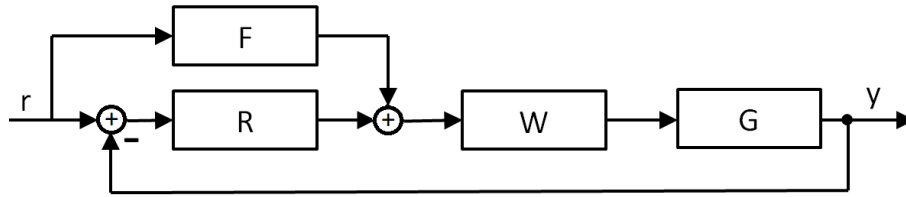
Spotyka się dedykowane struktury regulacji wykorzystujące dodatkowe sprzężenia. Struktura regulacji ze sprzężeniem do przodu w torze zakłócenia (feedforward) znajduje zastosowanie w układach regulacji, w których wartość zakłóceń jest mierzalna. Umożliwia kompensację wpływu zakłóceń w dodatkowej pętli sprzężenia [Lurie and Enright (1986)]. Gdzie  $F, W, G$  są odpowiednio funkcjami obiektu regulacji i sprzężenia np. w formie transmitancji operatorowej [Byrski (2007)].



Rysunek 4: Układ ze sprzężeniem do przodu w torze zakłócenia.

### 3.1.4 Układ ze sprzężeniem do przodu w torze nadążania

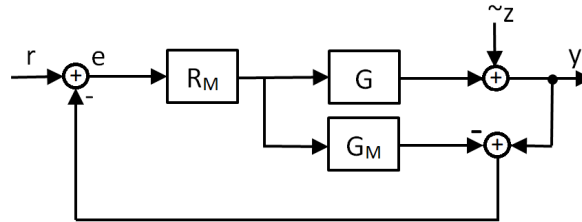
Struktura regulacji ze sprzężeniem do przodu w torze nadążania znajduje zastosowanie w układach regulacji nadążnej, w których wymagane jest szybkie nadążanie za wartością referencyjną i dokładna stabilizacja [Lurie and Enright (1986)].



Rysunek 5: Układ ze sprzężeniem do przodu w torze nadążania.

### 3.1.5 Struktura regulacji z modelem wewnętrznym

Struktura regulacji z modelem wewnętrznym składa się z dwupętlowego układu regulacji zawierającego model wewnętrzny (ang. IMC Internal Model Control) [Morari and Zafiriou (1989)] zapewnia odporność układu regulacji ze względu na niepewność modelu procesu. Wytyczne do strojenia struktury IMC zostały podane w publikacji [Seborg et al. (1989)].



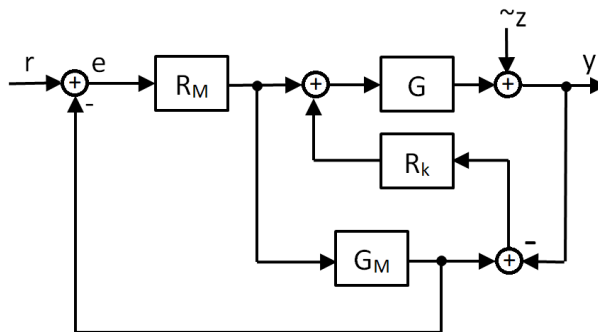
Rysunek 6: Struktura układu regulacji IMC z modelem wewnętrznym.

### 3.1.6 Zmodyfikowana struktura regulacji z modelem wewnętrznym

Struktura regulacji (MFC ang. Model Following Control) [Sugie and Osuka (1993)] (Rys. 7) realizuje funkcję korekcyjną opisaną wzorem (3).

$$y(s) = \frac{R_M G_M}{1 + R_M G_M} r(s) + \frac{1}{1 + R_k G} z(s) \quad (3)$$

Dla  $G_M = G$  następuje rozseparowanie wpływu regulatora  $R_M$  dla nadążania za trajekcją referencyjną  $r$  i regulatora  $R_k$  w torze zakłócenia [Byrski (2007)]. Dynamikę toru sterowania i toru kompensacji zakłóceń można kształtować niezależnie.



Rysunek 7: Struktura regulacji MFC z modelem wewnętrznym i regulatorem korekcyjnym.



### 3.2 Regulator od stanu

Sterowanie minimalno-kwadratowe jest to sterowanie stabilizujące, którego celem jest zmiana stanu układu, tak aby minimalizować kryterium wskaźnika jakości (7) na trajektoriach systemu [Mitkowski (1984)]. Regulator liniowo-kwadratowy (LQR, ang. Linear-quadratic regulator) jest to regulator ze sprzężeniem zwrotnym, który określa rozwiązanie optymalne dla tzw. problemu liniowo-kwadratowego LQ, to jest dla przypadku, w którym układ dynamiczny został opisany przez układ liniowych równań różniczkowych (4, 5), a koszt sterowania, który ma być zminimalizowany zgodnie z zasadami teorii sterowania optymalnego, opisany jest funkcjonałem kwadratowym (7) (wersja z nieskończonym horyzontem).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t); \quad (5)$$

gdzie

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{r \times n}, D \in \mathbb{R}^{r \times m} \quad (6)$$

Równanie wskaźnika kosztu dla problemu regulatora liniowo-kwadratowego na nieskończonym horyzontie przyjmuje postać (7) przy założeniu, że system jest obserwowalny i sterowalny (11, 9).

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (7)$$

Jako algebraiczne kryteria sterowalności i obserwowalności przyjmuje się kryteria Kalmana (9), (11),

$$\Omega_s = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (8)$$

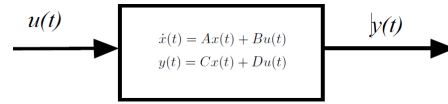
$$\text{rank}(\Omega_s) = n, \quad (9)$$

$$\Omega_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Obserwowalność jest własnością układu sterowania mówiącą, czy na podstawie odczytu sygnału sterującego oraz odczytu sygnału wyjściowego możliwe jest określenie wewnętrznego stanu obiektu. Znajomość tego stanu jest ważna w przypadku stosowania algorytmu estymacji minimalno-kwadratowej. Jeśli układ jest obserwowalny, to jest i wykrywalny. Dla układu wykrywalnego możliwe jest skonstruowanie obserwatora, który na podstawie wartości wejścia i wyjścia będzie estymował zmienne stanu.

$$\text{rank}(\Omega_o) = n, \quad (11)$$

gdzie  $r$  to liczba wyjść. Z założeń dotyczących sterowalności (11) i obserwowalności (9) wynika, że do rozwiązania problemu sterowania optymalnego (7) warunkiem koniecznym jest informacja o pełnym stanie systemu. Pełny stan systemu o jednym wejściu i jednym wyjściu SISO (Rys. 8) można opisać równaniem różniczkowym (12)



Rysunek 8: Schemat blokowy układu dynamicznego.

$$a_n y^n(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t), \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)} y(t)}{dt^{(i)}} = \sum_{l=0}^m b_l \frac{d^{(l)} u(t)}{dt^{(l)}}. \quad (13)$$

Stosując podstawienie zmiennych

$$x_1 = y, \quad (14)$$

$$x_2 = \dot{x}_1, \quad (15)$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1}, \quad (16)$$

równanie różniczkowe (12) n-tego rzędu możemy zapisać jako n-równań różniczkowych pierwszego rzędu (4), w których stan układu przedstawiany jest zwykle jako wektor  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  reprezentujący pamięć układu. Znając stan układu oraz sterowanie, można określić stan, który układ osiągnie po zadanym czasie. Dla układu regulacji opisanego układem równań różniczkowych (4) rozwiązanie dane jest funkcją

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Sterowanie optymalne ze sprzężeniem zwrotnym minimalizujące wskaźnik kosztu (7) określone jest przez prawo sterowania

$$u(t) = -Kx(t), \quad (18)$$

gdzie wzmocnienie regulatora  $K$  dane jest równaniem

$$K = R^{-1} B^T P. \quad (19)$$

Kwadratową macierz  $P$  można wyznaczyć, rozwiązując algebraiczne równanie Riccatiego (20)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (20)$$

Algebraiczne równanie Riccatiego określa rozwiązanie dla dwóch najbardziej fundamentalnych problemów teorii sterowania:

- stacjonarnego regulatora liniowo-kwadratowego (LQR) z nieskończonym horyzontem,
- stacjonarnego regulatora liniowo-kwadratowego-Gaussowskiego (LQG) z nieskończonym horyzontem.

Rozwiązując algebraiczne równanie Riccatiego, otrzymujemy wzór na prawo sterownia (18) w punkcie  $x_0(t)$  dla  $t \in [t_0, t_\infty]$ . W literaturze spotyka się alternatywne rozwiązania optymalizacji sterowania. Opisany jest algorytm doboru wzmocnienia regulatora dla systemu SISO wg wzoru Ackermanna poprzez lokowanie wartości własnych wielomianu charakterystycznego układu (Lemat 1), (24) w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego [Kailath (1980)]. Wzór Ackermanna (ang. Ackermann's formula) – algorytm, przedstawiony w 1972 roku, stosowany do lokowania biegunów w układach ze sprzężeniem zwrotnym od stanu.

**Lemat 1.** *Niech dany będzie układ liniowy ze sprzężeniem zwrotnym:*

$$u = -K_{Acker}x \quad (21)$$

gdzie  $u$  jest wektorem sterowań,  $x$  wektorem stanu,  $K$  wektorem wzmocnień. Podstawienie do równań stanu regulowanego układu daje zależność:

$$\dot{x} = Ax - BK_{Acker}x \quad (22)$$

Wzór Ackermanna jest metodą doboru wartości wzmocnień  $K$  w taki sposób, aby można było wpływać na położenie biegunów układu regulowanego SISO. Jeśli układ (22) jest sterowalny, można arbitralnie dobrać bieguny dla wzmocnienia  $K$  w układzie z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (21), korzystając z wzoru Ackermanna

$$K_{Acker} = [0 \ 0 \ \dots \ 1]\zeta^{-1}\phi(A), \quad (23)$$

gdzie

$[0 \ 0 \ \dots \ 1]$  jest wektorem jednostkowym o długości  $n$

$\zeta = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$  jest macierzą sterowalności układu (22)

$\phi(A)$  jest pożądanym równaniem charakterystycznym układu, wielomianem charakterystycznym macierzy  $A$  określonym wzorem

$$\phi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A + a_0I, \quad (24)$$

gdzie

$I$  jest macierzą jednostkową

$a_i$  są współczynnikami wielomianu charakterystycznego takimi, że wartości własne  $\lambda_i$  są pierwiastkami wielomianu

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0, \quad (25)$$

Metoda doboru wartości wzmocnień wg wzoru Ackermanna ma za zadanie doprowadzić wektor stanu (22) do zera dla arbitralnie przyjętych wartości własnych  $\lambda_i$ . Wynikiem zastosowania reguły Ackermanna jest optymalny dobór macierzy wzmocnienia (30) systemu SISO dla arbitralnie przyjętych wartości własnych  $\lambda_i$ .

### 3.3 Estymacja zmiennych stanu

#### 3.3.1 Obserwator liniowy

W teorii sterowania obserwator stanu (estymator stanu) to model matematyczny układu rzeczywistego, który wykorzystując pomiary wejść i wyjść, wylicza estymaty zmiennych stanu układu. Zwykle jest to model matematyczny zaimplementowany na komputerze. Znajomość stanu układu jest niezbędna przy rozwiązaniu wielu problemów teorii sterowania. Obserwowalność jest własnością układu sterowania mówiącą, czy na podstawie odczytu sygnału sterującego oraz odczytu sygnału wyjściowego możliwe jest określenie wewnętrznego stanu obiektu. Jeśli układ jest obserwowalny, to jest i wykrywalny. Dla układu wykrywalnego możliwe jest skonstruowanie obserwatora, który na podstawie wartości wejścia i wyjścia będzie estymował zmienne stanu. W większości przypadków bezpośredni pomiar wartości zmiennych stanu struktury wewnętrznej systemu nie jest możliwy. W systemach wykrywalnych i obserwowalnych można obserwować sygnał wejściowy oraz wyjście systemu. Jeśli system jest obserwowalny przy zastosowaniu obserwatora stanu, na podstawie pomiarów wejścia i wyjścia, można w pełni zrekonstruować stan układu. Jednym z najczęściej stosowanych obserwatorów liniowych jest obserwator Luenbergera, który posiada własność asymptotycznej zbieżności estymat do zmiennych stanu (4), (5). System liniowy o jednym wejściu i wyjściu można opisać macierzą stanu w postaci kanonicznej sterowalnej (26), (27), (28), gdzie  $A$  jest macierzą Hurwitza.

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

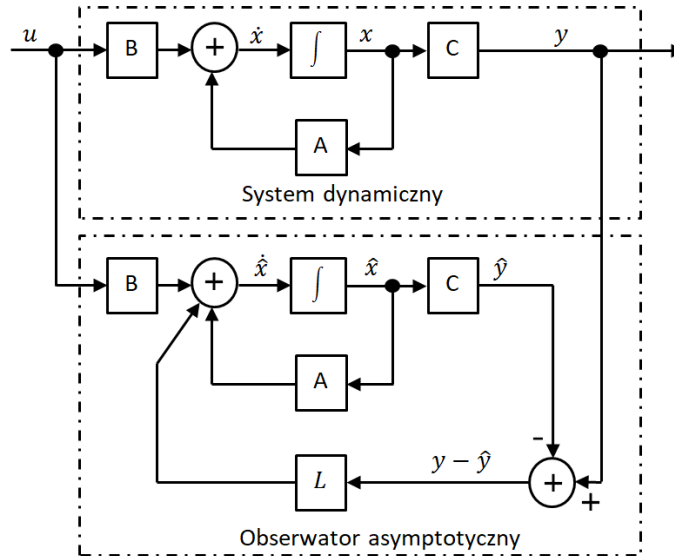
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$C = [ c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \cdots \quad c_0 ]. \quad (28)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n; u(t) \in \mathbb{R}^m; y(t) \in \mathbb{R}^r, A \in \mathbb{R}^{n \times n}; B \in \mathbb{R}^{n \times m}; C \in \mathbb{R}^{r \times n}; \quad (29)$$

Forma sterowalna determinuje istnienie i jednoznaczność rozwiązań, jest głównym kryterium aplikacji w systemach sterowania. W teorii sterowania rozwiązanie problemu obserwatora sprowadza się do wyznaczenia macierzy wzmocnienia obserwatora tak, aby błąd estymacji był asymptotycznie zbieżny do zera. Dla systemów nieliniowych najczęściej spotykanym rozwiązaniem estymacji stanu jest linearyzacja systemu nieliniowego w punkcie pracy. Na system liniowy, którego zadaniem jest estymacja dynamiki systemu nieliniowego w punkcie pracy, nakłada się kryterium spełnienia warunków sterowalności (9) [Klamka et al. (2013)]. W pracy do estymacji stanu systemu nieliniowego zaproponowano wykorzystanie obserwatora liniowego (Rys. 9), opisanego równaniem (30) ze względu na własność asymptotycznej zbieżności estymat.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (30)$$



Rysunek 9: Obserwator asymptotyczny schemat blokowy.

Zakładając, że stan układu fizycznego spełnia równania modelu matematycznego opisanego równaniami (4, 5), można zauważyć, że aktualne wyjście układu i jego przyszły stan określony jest jedynie przez bieżący stan układu i bieżące wejście układu. Jeśli system (4, 5) jest obserwowalny, to wyjście  $y$  można wykorzystać do polepszenia estymaty stanu (Rys. 9). Wyjście obserwatora można odjąć od wyjścia obiektu, pomnożyć przez macierz wzmocnienia i dodać do równań stanu obserwatora. Otrzymuje się obserwator Luenbergera, określony przez równania (30, 34). Wyrażenie  $L(y(t) - \hat{y}(t))$  nazywa się częścią korekcyjną, a macierz  $L$  macierzą wzmocnienia błędu zbieżności. Zmienne stanu obserwatora oznacza się „daszkami”, aby można je odróżnić od zmiennych równań opisujących system fizyczny. Obserwator jest stabilny asymptotycznie, jeśli błąd obserwatora zmierza do zera dla  $t \rightarrow \infty$ . Dla obserwatora Luenbergera błąd obserwatora spełnia równania (31,32).

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t); t \in (t_0, \infty) \quad (31)$$

$$\dot{e}_L(t) = (A - LC)e_L(t), \quad (32)$$

$$e_L(t) \rightarrow 0, \forall t \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Obserwator Luenbergera jest asymptotycznie stabilny, jeśli macierz  $A - LC$  posiada tylko wartości własne w lewej półpłaszczyźnie, jest macierzą Hurwitza,  $\dot{e}_L \rightarrow 0$ . Po przekształceniu równanie (30) otrzymuje postać

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t) \quad (34)$$

gdzie

$$F = A - LC. \quad (35)$$

jest macierzą Hurwitza. Wartości własne macierzy  $A - LC$  można arbitralnie dobrać poprzez właściwy wybór wzmocnienia  $L$  obserwatora (gdy para  $[A, C]$  jest obserwowalna). W literaturze opisany jest algorytm doboru wzmocnienia obserwatora dla systemu SISO wg wzoru Ackermanna poprzez

lokowanie wartości własnych macierzy  $A - LC$  [Kailath (1980)], [Byrski (2007)]. Wielomian charakterystyczny macierzy obserwatora  $F$  dany jest wzorem

$$\alpha(s) = |sI - A + LC| = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (36)$$

gdzie  $a_i$  współczynniki wielomianu,  $s_i$  pierwiastki wielomianu, w zapisie macierzowym otrzymujemy

$$\alpha(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I, \quad (37)$$

$$L = a(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

W zadaniu śledzenia trajektorii referencyjnej można przyjąć założenie, że błąd (39) jest mały,  $\hat{e}(t) \rightarrow 0$ .

$$\hat{e}(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad (39)$$

Otrzymano równanie obserwatora śledzącego trajektorię referencyjną  $y_r(t)$  (40) poprzez modyfikację klasycznego równania obserwatora liniowego

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - y_r(t) - C\hat{x}(t)). \quad (40)$$

### 3.3.2 Filtr Kalmana

Dany jest liniowy system dynamiczny podlegający zakłóceniom Gaussowskim (41, 42, 43)

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \quad (41)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Hw(t) + \nu(t), \quad (42)$$

$$E(w) = E(\nu) = 0, \quad E(ww^T) = Q, \quad E(\nu\nu^T) = R. \quad (43)$$

Filtr Kalmana (LQF) jest optymalnym estymatorem liniowo-kwadratowym stanu układu dynamicznego, pracującego w obecności białego szumu (Gaussa). Dla systemu (41, 42) estymator LQF minimalizuje kowariancję błędu w stanie ustalonym

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\{x - \hat{x}\}\{x - \hat{x}\}^T) \quad (44)$$

Optymalny filtr Kalmana opisany jest równaniami (45, 46) [Franklin et al. (1990)], [Lewis (1986)].

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (46)$$

Statyczne wzmocnienie filtra Kalmana  $L$  określa się zależnością (47), rozwiązując algebraiczne równanie Riccatiego na macierz  $P$  (47)

$$L = (PC^T + \bar{N})\bar{R}^{-1} \quad (47)$$

$$AP + PA^T - L\bar{R}L^T + Q = 0 \quad (48)$$

gdzie

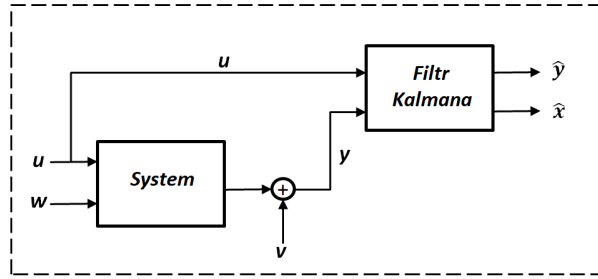
$$\bar{R} = R + HN + N^T H^T + HQH^T \quad (49)$$

$$\bar{N} = G(QH^T + N) \quad (50)$$

gdzie macierz kwadratowa  $P$  spełnia nieliniowe macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego [Byrski (2007)], [Bucy and Joseph (1968)], [Jazwinski (1970)]

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - L(t)\bar{R}L^T(t) + Q \quad (51)$$

$P(t)$  jest rozwiązaniem równania Riccatiego. Estymator wykorzystuje znane dane wejściowe  $u$  i pomiary  $y$  do generowania estymaty wyjścia  $\hat{y}$  i estymat stanu  $\hat{x}$ . Estymata wyjścia  $\hat{y}$  szacuje prawdziwą wartość na wyjściu systemu (42).



Rysunek 10: Schemat Filtru Kalmana.

### 3.3.3 Dyskretny Filtr Kalmana

Dyskretny Filtr Kalmana to algorytm rekurencyjnego wyznaczania minimalno-wariancyjnej estymaty wektora stanu modelu liniowego dyskretnego układu dynamicznego na podstawie pomiarów wyjścia oraz wejścia tego układu. Przyjmuje się założenie, że zarówno pomiar, jak i proces przetwarzania wewnątrz układu jest obciążony błędem o rozkładzie Gaussowskim. Dany jest system dynamiczny opisany równaniami różnicowymi [Franklin et al. (1990)], [Lewis (1986)]

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw[k] \quad (52)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k] + Hw[k] + v[k] \quad (53)$$

podlegający zakłóceniom Gausowskim o kowariancji

$$E(w[k]w[k]^T) = Q, E(v[k]v[k]^T) = R, E(w[k]v[k]^T) = N. \quad (54)$$

Równanie estymatora stanu przyjmuje formę (55)

$$\hat{x}[k+1|k] = A\hat{x}[k|k-1] + Bu[k] + L(y[k] - C\hat{x}[k|k-1] - Du[k]). \quad (55)$$

Wzmocnienie  $L$  filtru Kalmana oblicza się przez rozwiązanie dyskretnego równania Riccatiego

$$L = (APC^T + \bar{N})(CPC^T + \bar{R})^{-1} \quad (56)$$

gdzie

$$\bar{R} = R + HN + N^T H^T + HQH^T \quad (57)$$

$$\bar{N} = G(QH^T + N) \quad (58)$$

Istnieją dwa warianty estymatorów Kalmana z czasem dyskretnym, estymator równania wyjściowego przyjmuje formę (59)

$$\begin{bmatrix} \hat{y}[k|k] \\ \hat{x}[k|k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - M_y C) \\ I - M_x C \end{bmatrix} \hat{x}[k|k-1] + \begin{bmatrix} (I - M_y)D & M_y \\ -M_x D & M_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[k] \\ y[k] \end{bmatrix} \quad (59)$$

gdzie macierze innowacji  $M_x$  i  $M_y$  zdefiniowane są jako:

$$M_x = PC^T(CPC^T + \bar{R})^{-1} \quad (60)$$

$$M_y = (CPC^T + HQH^T + HN)(CPC^T + \bar{R})^{-1} \quad (61)$$

$M_x$  aktualizuje predykcję  $\hat{x}[k|k-1]$  za pomocą nowego pomiaru  $y[k]$

$$\hat{x}[k|k] = \hat{x}[k|k-1] + M_x(y[k] - C\hat{x}[k|k-1] - Du[k]), \quad (62)$$

gdzie  $H = 0$ ,  $M_y = CM_x$ ,

$$y[k|k] = Cx[k|k] + Du[k]. \quad (63)$$

Estymator generuje dane wyjściowe  $\hat{y}[k|k-1]$  oraz estymaty stanu  $\hat{x}[k|k-1]$ , używając pomiarów tylko do wartości  $y_\nu = [k-1]$ . Opisany estymator na równanie wyjściowe łatwiej jest zaimplementować w pętli sterowania.

$$\begin{bmatrix} \hat{y}[k|k-1] \\ \hat{x}[k|k-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x}[k|k-1] + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[k] \\ y[k] \end{bmatrix} \quad (64)$$

Założenia:

- System i szum muszą być wykrywalne ( $C$ ,  $A$ )
- $\bar{R} > 0$ ,  $\bar{Q} - \bar{N}\bar{R}^{-1}\bar{N}^T \geq 0$
- $(A - \bar{N}\bar{R}^{-1}C, \bar{Q} - \bar{N}\bar{R}^{-1}\bar{N}^T)$  nie posiada wartości na osi urojonej (lub wartości zawierają się w okręgu jednostkowym dla systemu dyskretnego) z notacją

$$\bar{Q} = GQG^T$$

$$\bar{R} = R + HN + N^T H^T + HQH^T$$

$$\bar{N} = G(QH^T + N)$$



### 3.3.4 Rozszerzony Filtr Kalmana EKF

Rozszerzony filtr Kalmana (EKF, ang. Extended Kalman Filter) [Ljung (1979)], [Huang et al. (2008)] jest algorytmem numerycznym bazującym na obliczeniach dyskretnego filtru Kalmana z predykcją i korekcją estymat. Jest przybliżonym filtrem dla systemów nieliniowych, w oparciu o linearyzację pierwszego rzędu, obserwatorem nieliniowym. Przyjmuje się założenie, że zarówno pomiar, jak i proces przetwarzania wewnątrz układu jest obciążony błędem o rozkładzie Gaussowskim. W pracy [Ljung (1979)] poddano analizie zbieżność metody EKF. Wykazano, że ogólnie szacunki mogą być tendencyjne lub rozbieżne. Niech  $f$  będzie nieliniową funkcją przejścia stanu, która opisuje ewolucję stanów  $x$  z jednego kroku czasowego do drugiego (65). Nieliniowa funkcja pomiarowa  $h$  odnosi stan  $x$  do pomiarów  $z(k)$  w  $k$  kroku czasowym (66). Wartości  $w$  i  $v$  oznaczają nieskorelowane zakłócenia procesowe i pomiarowe o zerowej wartości średniej. Równania stanu i pomiarów przyjmują postać (65), (66). W rozszerzonym filtrze Kalmana modele zmiany stanu i obserwacji nie muszą być liniowymi funkcjami stanu.

$$x[k] = f(x[k-1], u[k]) + w[k] \quad (65)$$

$$z[k] = h(x[k]) + v[k] \quad (66)$$

Gdzie  $w[k]$  i  $v[k]$  są zakłóceniami zmiennych stanu procesu i obserwacji o rozkładzie Gaussowskim z wartością średnią równą zero oraz macierzą kowariancji  $Q_k$  i  $R_k$ ,  $u[k]$  jest wektorem sterowania. Funkcja nieliniowa  $f$  może być użyta do obliczenia przewidywanego stanu z poprzedniego kroku estymacji, podobnie funkcja  $h$  może być użyta do obliczenia przewidywanego wyjścia od przewidywanego stanu. Wyliczana jest macierz cząstkowych pochodnych (jakobian). W każdym kroku stopień jakobianu jest szacowany z aktualną predykcją stanu. Algorytm EKF linearyzuje nieliniową funkcję wokół bieżącego oszacowania. Algorytm rozszerzonego filtru Kalmana można zapisać w postaci równań rekurencyjnych.

Predykcja estymaty stanu

$$\hat{x}[k+1|k] = f(\hat{x}[k-1|k-1], u[k]) \quad (67)$$

Predykcja estymaty kowariancji

$$P[k+1|k] = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k \quad (68)$$

Aktualizacja pomiaru.

Aktualizacja dyskretniej wartości czasu  $k \rightarrow k+1$

Innowacja lub pomiar resztkowy

$$\tilde{y}[k] = z[k] - h(\hat{x}[k|k-1]) \quad (69)$$

Innowacja kowariancji (lub rezydualna)

$$S[k] = H[k] P[k|k-1] H_k^T + R_k \quad (70)$$

Suboptymalne wzmocnienie Kalmana

$$K[k] = P[k|k-1] H_k^T S_k^{-1} \quad (71)$$

Aktualizacja predykcji stanu

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k \quad (72)$$

Aktualizacja estymaty kowariancji

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (73)$$

gdzie zmiana stanu i macierze obserwacji określone są jacobianem

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}[k-1|k-1], u[k]} \quad (74)$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}[k|k-1]} \quad (75)$$

Rozszerzony filtr Kalmana nie jest optymalnym estymatorem dla systemu nieliniowego. Algorytm jest wrażliwy na wstępne oszacowanie stanu, modelowanie procesu, wartość macierzy kowariancji. Zaburzenia tych wartości wpływają na dokładność filtru, mogą powodować rozbieżność i niestabilność [Ljung (1979)], [Bania and Baranowski (2016)]. Szacowanie macierzy kowariancji wykazuje tendencję do niedoszacowania wartości, co jest przyczyną obciążenia estymatorów. Problematicznym zagadnieniem w zastosowaniu EKF jest aktualizacja pomiaru po predykcji estymaty kowariancji. W stanie nieustalonym estymata kowariancji jest obciążona, wartość obciążonej estymaty kowariancji wpływa na obciążenie innowacji i aktualizacji predykcji stanu. W systemach wolno-zmiennych spełniających warunek Lipschitza (76) wpływ obciążenia estymatorów można pominąć

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|; x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad (76)$$

gdzie  $L$  jest stałą. W systemach silnie nieliniowych nie spełniających warunku Lipschitza obciążenie estymatorów może być źródłem powstawania nieakceptowalnych wartości błędów, które mogą prowadzić do destabilizacji systemu w układzie regulacji z estymacją stanu (67). Aby wyeliminować problemy występujące w algorytmie rozszerzonego filtru Kalmana, powstało wiele modyfikacji.

- Iterative extended Kalman filter – usprawnia linearyzację rozszerzonego filtru Kalmana, rekursywnie modyfikując punkt środkowy ekspansji Taylora. Zmniejsza błąd linearyzacji kosztem zwiększonych wymagań obliczeniowych.
- Robust extended Kalman filter– zawiera algorytm usprawniający rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego, z warunkiem optymalizacji dla stabilności, stabilność uzyskuje się przez wybranie pozytywnie określonego warunku rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego dla macierzy wzmocnienia. Dodatkowy warunek jest sparametryzowany za pomocą skalaru, który można modyfikować, uzyskując kompromis między kryteriami błędu średniokwadratowego i maksymalnego [Einicke and White (1999)].
- Invariant extended Kalman filter (IEKF) – jest zmodyfikowaną wersją EKF dla nieliniowych systemów posiadających symetrię (lub niezmienniki). Łączy zalety zarówno EKF, jak i filtrów utrzymujących symetrię. Zamiast stosowania liniowego składnika korekcji opartego na liniowym błędzie wyjściowym IEKF wykorzystuje geometrycznie dostosowane pojęcie korekcji oparte na niezmiennym błędzie wyjściowym; w ten sam sposób macierz wzmocnienia nie jest aktualizowana z błędu stanu liniowego, ale z niezmiennego błędu stanu. Główną zaletą jest to, że równania wzmocnienia i kowariancji zbiegają się do wartości stałych na znacznie większym zbiorze trajektorii niż punkty równowagi, jak ma to miejsce w przypadku EKF, co skutkuje lepszą zbieżnością estymacji.

- Unscented Kalman filter (UKF) – jest nieliniowym filtrem Kalmana, który obiecuje poprawę w stosunku do EKF. W UKF gęstość prawdopodobieństwa jest aproksymowana przez deterministyczne próbkowanie punktów, które reprezentują podstawowy rozkład Gaussa. Nieliniowa transformacja tych punktów ma na celu oszacowanie rozkładu a posteriori, którego momenty można następnie wyprowadzić z transformowanych próbek. Transformacja jest znana jako bezzapachowa transformacja. UKF wydaje się bardziej solidny i dokładniejszy niż EKF przy szacowaniu błędu we wszystkich kierunkach [Julier and Uhlmann (2004)].

---

## 4 Sterowanie systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi

### 4.1 Silna nieliniowość

Pojęcie silnej nieliniowości jest często spotykane w literaturze. Autorzy za pomocą pojęcia silnej nieliniowości najczęściej określają systemy (77), (78), w których nie są spełnione klasyczne założenia teorii sterowania nieliniowego.

$$\psi = f(\xi(t), u(t)); u \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}, \psi \in \mathbb{R} \quad (77)$$

gdzie  $\xi$  jest wektorem stanu, równanie wyjścia dane jest zależnością

$$y = g(\psi, u). \quad (78)$$

Określenie silnej nieliniowości wprowadził w literaturze [Ton (1971)], w oparciu o badania [Browder (1964)] i [Lions (1965)] nad teorią operatorów monotonicznych zdefiniowanych na refleksyjnych separowalnych przestrzeniach Banacha.

**Definicja 1.** Przestrzeń refleksyjna [Conway (1990)] – przestrzeń unormowana  $X$ , o tej własności, że kanoniczne włożenie w drugą przestrzeń sprzężoną

$$\kappa_X : X \rightarrow X^{**} \quad (79)$$

dane wzorem

$$\langle \kappa_X(x), f \rangle = \langle f, x \rangle; x \in X, f \in X^* \quad (80)$$

jest suriektywne (a zatem z izometryczności, jest ono wówczas izometrycznym izomorfizmem).

**Definicja 2.** Izomorfizm (gr. *isos* – równy, *morphe* – kształt) – funkcja wzajemnie jednoznaczna z jednego obiektu matematycznego w drugi, która zachowuje funkcje, relacje i wyróżnione elementy. Grupy izomorficzne mają identyczne struktury, różnią się jedynie oznaczeniem swoich elementów [Bronsztajn et al. (2007)].

Definicja silnej nieliniowości wg [Browder (1964)] i [Lions (1965)] jest istotna w prezentowanej w pracy, ponieważ problem nieliniowości został uogólniony na systemy nieciągłe, nieróżniczkowalne, w których można wyróżnić struktury liniowe zdefiniowane na liniowych przestrzeniach unormowanych, powiązane zależnościami funkcyjnymi, które determinują powtarzalność odpowiedzi systemu z akceptowalnym poziomem błędu. Z dużym prawdopodobieństwem można przyjąć, że model zlinearyzowany jest modelem obciążonym błędami niedoszacowania lub przeszacowania stałych czasowych i wzmocnienia. Z powyższych względów głównym problemem w linearyzacji systemów nieliniowych jest dokładnie odwzorowanie dynamiki systemu nieliniowego wokół punktu referencyjnego, które jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym. Zgodnie z założeniem optymalizowanego po trajektoriach systemu wskaźnika kosztu (7) regulator LQR pracuje minimalizując błąd. W przypadku niedokładnego modelu systemu regulator LQR obliczony według wskaźnika (7) może nie spełnić kryterium sterowalności (model niedoszacowany) lub generować przesterowania prowadzące do oscylacji i destabilizacji systemu (model przeszacowany). W pracy [Khalil (2015)] w rozdziale „High Gain Observer” przeprowadzono dowód matematyczny poparty przykładami obliczeniowymi na istnienie i stabilność obserwatora liniowego o dużym wzmocnieniu dla systemu niepewnego, nieliniowego, który posiada własności kompensujące niedokładności modelu.

## 4.2 Linearyzacja systemów nieliniowych i silnie nieliniowych

Złożoność systemów nieliniowych i silnie nieliniowych powoduje, że systemy które można opisać znanymi równaniami różniczkowymi, stanowią klasę podsystemów wśród systemów nieliniowych. Z klasy systemów nieliniowych opisanych równaniami różniczkowymi można wyróżnić klasę systemów nieliniowych, dla których opisujące je równania różniczkowe posiadają znane rozwiązania. Z powyższych względów w pracy zaproponowano uogólnione podejście do linearyzacji każdej z klas systemów nieliniowych, które spełniają warunek sterowalności w sensie BIBO. Zaproponowano linearyzację opartą na algorytmie estymacji dynamiki modelu systemu nieliniowego SISO wokół punktu referencyjnego, skończenie wymiarowym modelem liniowym. Tego typu odwzorowania w matematyce określane są rzutem lub projekcją. Projekcją w matematyce nazywane jest mapowanie zbioru lub innej struktury matematycznej do podzbioru lub podstruktury. Szczególnym przypadkiem rzutowania są odwzorowania w przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$ .

**Definicja 3.** [Bronsztajn et al. (2007)] Niech  $\mathbb{H}_0$  będzie podprzestrzenią w przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$ . Wtedy na mocy twierdzenia o rzucie dla każdego  $x \in \mathbb{H}$  możemy zdefiniować jego rzut  $x'$  na  $\mathbb{H}_0$  oraz operator  $P$  z  $\mathbb{H}$  w  $\mathbb{H}_0$  taki, że  $Px = x'$ .  $P$  nazywamy rzutem lub projekcją na  $\mathbb{H}_0$ . Operator  $P$  jest liniowy i ciągły oraz  $\|P\| = 1$ . Operator liniowy ciągły  $P$  w  $\mathbb{H}$  jest rzutem na pewną podprzestrzeń wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$P = P^*, \text{ tzn że } P \text{ jest samosprężony}$$

$P^2 = P$ , tzn że  $P$  jest idempotentny (właściwość pewnych operacji, która pozwala na ich wielokrotne stosowanie bez zmiany wyniku)

Podprzestrzenią przestrzeni Hilberta nazywamy jej domkniętą podprzestrzeń liniową.

W systemach fizycznych nie izolowanych, które są systemami nieskończenie wymiarowymi, nie można założyć istnienia operatora rzutowania wg (Definicji 3) sprzężonego lub samosprężonego. Dla celów linearyzacji przyjęto uogólnioną definicję projekcji, która jest przekształceniem jednostronnym, nieodwracalnym z akceptowalnym poziomem błędem. Właściwości projekcji zostały użyte do linearyzacji modelu dynamiki systemów nieliniowych SISO lokalnie obserwowalnych i sterowalnych w otoczeniu punktu referencyjnego.

### 4.2.1 Linearyzacja statyczna Taylora

Klasyczne rozwiązania bazują na linearyzacji punktowej poprzez rozwinięcie funkcji w szereg Taylora. Załóżmy, że znany jest model dynamiki układu opisany zależnością

$$\frac{dy}{dt} = f(u, y) \quad (81)$$

Liniowa aproksymacja układu może być wykonana poprzez rozwinięcie funkcji (81) w szereg Taylora. Przy założeniu pomijalnego wpływu pochodnych wysokiego rzędu można odrzucić rozwinięcia składników nieliniowych wysokiego rzędu.

$$f(u, y) \approx f(u_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(u, y)}{\partial u} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (u - u_0) + \left. \frac{\partial f(u, y)}{\partial y} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (y - y_0) \quad (82)$$

W punkcie linearyzacji występuje stan ustalony, element statyczny można opisać stacjonarnym równaniem algebraicznym (83).

$$f(u_0, y_0) = 0 \quad (83)$$

Zgodnie z równaniem (83) pierwszy składnik prawej strony równania (82) jest równy zero. Wobec tego równanie (82) przyjmuje postać:

$$f(u, y) = \frac{\partial f(u, y)}{\partial u} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (u - u_0) + \frac{\partial f(u, y)}{\partial y} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (y - y_0) \quad (84)$$

po wprowadzeniu do równania (82) otrzymujemy rozwinięcie w punkcie. Przekształcając równanie (84), można je zapisać w postaci równania linii prostej (85) linearyzującej nieliniową charakterystykę statyczną wokół punktu pracy  $(x_0, y_0)$ .

$$y = y_0 - \frac{\frac{\partial f(u, y)}{\partial u}}{\frac{\partial f(u, y)}{\partial y}} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (u - u_0) \quad (85)$$

Jest to linearyzacja statyczna nie uwzględniająca dynamiki systemu, co w przypadku systemów o silnych nieliniowościach jest źródłem nieakceptowalnych błędów.

#### 4.2.2 Linearyzacja dynamiczna Taylora

Załóżmy, że system posiada punkt referencyjny równowagi  $(u_0, y_0)$ , który przyjmujemy jako punkt pracy. Dynamikę systemu można opisać stacjonarnym równaniem różniczkowym

$$f(u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0; \quad m \leq n \quad (86)$$

Zakładając istnienie pochodnych  $n$ -tego rzędu względem argumentów, można wykonać linearyzację równania (86) poprzez rozwinięcie funkcji  $f$  w szereg Taylora [Bronsztajn et al. (2007)] w otoczeniu statycznego punktu pracy  $(u_0, 0, \dots, 0, y_0, 0, \dots, 0)$  i odrzucenie składników nieliniowych rozwinięcia szeregu Taylora. W statycznym punkcie pracy z definicji możemy przyrównać wszystkie pochodne do zera, po przyrównaniu otrzymujemy równanie charakterystyki statycznej

$$f(u, 0, \dots, 0, y, 0, \dots, 0) = 0, \quad (87)$$

które jest prawdziwe dla statycznego punktu pracy

$$f(u_0, 0, \dots, 0, y_0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (88)$$

Rozwinięcie funkcji (86) w szereg Taylora w otoczeniu statycznego punktu pracy  $(x_0, y_0)$  można przedstawić w formie:

$$\begin{aligned} f(u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = & f(u_0, 0, \dots, 0, y_0, 0, \dots, 0) + \\ & \frac{\partial f}{\partial u} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (\dot{u} - 0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^{(m)}} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (u^{(m)} - 0) + \\ & \frac{\partial f}{\partial y} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (\dot{y} - 0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Bigg|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (y^{(n)} - 0) + R, \end{aligned} \quad (89)$$

gdzie  $R$  składniki nieliniowe rozwinięcia funkcji w szereg Taylora. Po odrzuceniu składników nieliniowych w równaniu (89) dla warunków początkowych (87), (88) równanie (89) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}
 f(u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (u - u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} \dot{u} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial u^{(m)}} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} u^{(m)} + \\
 &\quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} (y - y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} \dot{y} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{\substack{u = u_0 \\ y = y_0}} y^{(n)} \quad (90)
 \end{aligned}$$

Równanie (90) jest zlinearyzowanym równaniem, w otoczeniu statycznego punktu pracy  $(u_0, y_0)$  systemu dynamicznego opisanego równaniami różniczkowymi (86). Równanie (90) uwzględnia dynamikę systemu, ale posiada ograniczenia (87), (88), które zakładają, że system jest izolowany, posiada punkt pracy, który spełnia założenia punktu równowagi systemu o zerowych warunkach początkowych. Takie uwarunkowania zawężają zastosowanie linearyzacji Taylora do klasy systemów dynamicznych spełniających powyższe restrykcyjne założenia. Spełnienie założeń linearyzacji Taylora postuluje fizyczne istnienie układów, w których nie działają siły lub suma oddziaływań się zeruje  $\sum_{i=1}^{\infty} F_i = 0$ . W obecnym stanie badań fizyki nie stwierdzono istnienia układów izolowanych o takich własnościach. W klasycznej linearyzacji systemów silnie nieliniowych poprzez rozwinięcie w skończony szereg Taylora funkcja liniowa obciążona jest istotnymi błędami, nie można pominąć członów nieliniowych wysokiego rzędu, linearyzacja obejmuje charakterystykę statyczną lub zakłada zerowe warunki początkowe w przypadku linearyzacji dynamiki systemu. Powyższe ograniczenia sprawiają, że zastosowanie linearyzacji Taylora w systemach silnie nieliniowych wprowadza znaczące obciążenie estymatorów, co w problemie liniowo kwadratowym projektowania regulatora LQ dla systemów nieliniowych może prowadzić do nieakceptowalnych błędów. Klasyczne algorytmy linearyzacji dla układów nieliniowych nie uwzględniają kryterium stabilności systemu poza punktem linearyzacji, [Khalil (2015)], [Kremer and Respondek (1985)]. Rozwiązania oparte o rozszerzony filtr Kalmana (EKF) są wiarygodne dla systemów nieliniowych, które spełniają warunek Lipschitza (76), o nieliniowościach wolno zmiennych w relacji do możliwości dyskretyzacji wartości zmiennych stanu systemu nieliniowego oraz stałej kowariancji zakłóceń o rozkładzie Gaussowskim [Julier and Uhlmann (2004)]. W klasycznym podejściu do linearyzacji układów nieliniowych obliczany jest wektor sterowania *a posteriori*, bez uwzględnienia warunku sterowalności (9) *a priori* [Julier and Uhlmann (2004)], [Huang et al. (2008)].

$$|u(t)| < u_N; u_N \in \mathbb{R} \quad (91)$$

$$|y| < y_N; y_N \in \mathbb{R}. \quad (92)$$

Istnieją klasy systemów nieliniowych w mechanice, które są nieróżniczkowalne w klasycznym sensie, nie można dla nich zastosować linearyzacji poprzez rozwinięcie w szereg Taylora. Mając na uwadze powyższe uwarunkowania i założenia do linearyzacji, zaproponowano zmodyfikowaną metodę najmniejszych kwadratów LSE [Latocha (2017)], która pozwala na linearyzację systemów spełniających warunek stabilności BIBO dla niezerowych warunków początkowych przy założeniu, że sygnał testujący spełnia kryterium zmienności określone w publikacji [Soderstrom and Stoica (1989)].

### 4.2.3 Sformułowanie problemu linearyzacji IIR-MA

W systemach fizycznych aksjomaty matematyki: punkt, prosta, na których oparte są dowody matematyczne, nie istnieją. Z powyższych względów w pracy zaproponowano nowe podejście do linearyzacji systemów nieliniowych i silnie nieliniowych polegające na linearyzacji systemu nieliniowego na przedziale poprzez projekcję. Model dynamiki systemu nieliniowego w otoczeniu punktu referencyjnego dla funkcji testującej spełniającej założenia estymacji najmniejszych kwadratów [Soderstrom and Stoica (1989)] jest rzutowany na model dynamiki systemu liniowego w postaci kanonicznej sterowalnej, z wykorzystaniem regresji liniowej, algorytmu estymacji najmniejszych kwadratów z akceptowalnym błędem równania. Modelem liniowym, który estymuje dynamikę systemu nieliniowego na przedziale linearyzacji, jest model filtru impulsowego o nieskończonej odpowiedzi i średniej ruchomej IIR-MA (ang. Infinite Impulse Response Moving Average) opisany transmitancją operatorową (93). Zastosowanie algorytmu estymacji LSE na przedziale linearyzacji pozwala obliczyć model liniowy filtru IIR-MA, który będzie uśredniał wartość sygnału wyjściowego.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}; s \in \mathbb{C} \quad (93)$$

Do obliczenia funkcji filtrującej na zbiorze punktów linearyzacji wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów dla funkcji bazowej ARMAX (ang. AutoRegressive Moving Average with eXogenous input) autoregresywnej o średniej ruchomej z zewnętrznym oddziaływaniem zakłóceń (95), [Latocha (2018)].

**Definicja 4.** Oznaczenie ARMAX ( $p, q, b$ ) odnosi się do modelu z wyrażeniami autoregresyjnymi  $p$ , wyrażeniami średniej ruchomej  $q$  i wyrażeniami wejść egzogennych (*zewnętrznych*)  $b$ . Model ARMAX zawiera modele  $AR(p)$  i  $MA(q)$  oraz liniową kombinację  $b$  warunków znanej zewnętrznej serii czasowej  $d_t$  [Hannan (1970)], [?], [Hannan and Deistler (1988)]. Dany jest wzorem

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^b \eta_i d_{t-i}, \quad (94)$$

gdzie  $\eta_1, \dots, \eta_b$  są parametrami egzogennych danych wejściowych  $d_t$ . W literaturze spotyka się zapis w formie operatorowej z czasem dyskretnym [Diversi et al. (2011)], [Landau and Karimi (1999)], [Ding and Chen (2005)]

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \varepsilon(k). \quad (95)$$

Wykorzystanie modelu ARMAX w linearyzacji nie wymaga znajomości struktury systemu nieliniowego oraz spełnienia założeń o różniczkowalności, warunkiem koniecznym i wystarczającym jest spełnienie kryterium sterowności BIBO oraz postulat, że system zawiera znormalizowane struktury liniowe (Rozdział 4.1), których wzajemne oddziaływanie można opisać funkcją [Ton (1971)], [Browder (1964)], [Lions (1965)]. Ze wzoru (95) wynika, że liniowe przybliżenie systemu nieliniowego obarczone jest błędem

$$\varepsilon = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \varepsilon(k). \quad (96)$$

Założmy, że dla modelu opisanego równaniem (95) istnieje równoważny dyskretny system liniowy w postaci kanonicznej sterowalnej (97, 98)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (97)$$

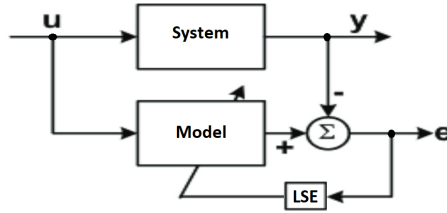


$$y(k) = Cx(k) + \varepsilon. \quad (98)$$

Błąd estymacji systemu nieliniowego (96) dodano do równania wyjścia estymatora liniowego (98).

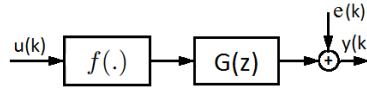
#### 4.2.4 Model estymatora systemu nieliniowego

W pracy przyjęto założenie, że model nieliniowy będzie przybliżany modelem liniowym typu black-box (Rys. 11).



Rysunek 11: Model linearyzacji.

Struktura modelu estymującego system nieliniowy (Rys. 12), składa się z nieliniowego bloku opisanego funkcją  $f(\cdot)$  oraz dynamicznego bloku liniowego opisanego funkcją operatorową  $G(z)$  w dziedzinie czasu dyskretnego. Blok nieliniowy  $f(\cdot)$  reprezentuje nieciągłość sygnału  $u(k)$  na początku przedziału linearyzacji dla niezerowych warunków początkowych [Latocha (2017)].



Rysunek 12: Struktura modelu estymującego system nieliniowy.

#### 4.2.5 Estymator najmniejszych kwadratów

W pracy do estymacji systemu nieliniowego wykorzystano algorytm najmniejszych kwadratów błędu równania, LSE [Khalil (2015)], [Soderstrom and Stoica (1989)]. Założono, że model liniowy  $G(z)$  będzie estymowany przez model ARMAX dla zbioru punktów linearyzacji

$$u(k_0 \dots k_N), \quad (99)$$

$$y(k_0 \dots k_N); u \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N}, \quad (100)$$

ze stałym krokiem dyskretyzacji  $\Delta t$ . Rozważmy model parametryczny opisany równaniem

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta; k > 0, \quad (101)$$

gdzie  $y(k)$  jest dyskretnym wyjściem systemu,  $\varphi(k)$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem punktów linearyzacji,  $\theta$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem poszukiwanych współczynników. W zapisie macierzowym zależność (101) można przedstawić wzorem

$$Y = \Phi^T \theta; \Phi \in \mathbb{R}^{(n+m) \times N}. \quad (102)$$

W celu zminimalizowania niedokładności modelu w algorytmie estymacji LSE błędu równania, użyto nadmiarowej ilości punktów dyskretyzacji w relacji do rzędu równania (98). Dla  $N \gg n$  system (102)

jest nadmiarowy, nie posiada jednoznacznego rozwiązania. Dla nadmiarowej ilości danych macierz danych  $\Phi$  nie jest macierzą kwadratową. W tym przypadku macierz danych może być zastąpiona macierzą pseudokwadratową (103). Minimalizując błąd estymacji (103) [Kremer and Respondek (1985)], [Keesman (2011)], otrzymujemy

$$\varepsilon(k) = y(k) - \varphi^T(k)\theta, \quad (103)$$

gdzie estymator najmniejszych kwadratów  $\hat{\theta}$  jest zdefiniowany jako wektor minimalizujący funkcję kosztu (104)

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(k) = \sum_{t=1}^N (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2, \quad (104)$$

$$J(\theta) = \varepsilon^T \varepsilon = (Y^T - \theta^T \Phi^T)(Y - \Phi\theta), \quad (105)$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial(\theta)} = -2\Phi^T y + 2\Phi^T \Phi\theta, \quad (106)$$

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T y. \quad (107)$$

Wektor  $\hat{\theta}$  jest wektorem estymowanych współczynników z hiperpłaszczyzny najmniejszych kwadratów wyrażonym zależnością

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y. \quad (108)$$

Pseudokwadratowa macierz danych  $\Phi$  może być bliska utraty rzędu, pomimo że jest odwracana. W celu sprawdzenia poprawnego uwarunkowania rozwiązania równania (108) wykorzystano równania (109, 110). Znaczące perturbacje poza główną diagonalą (110) świadczą o złym uwarunkowaniu rozwiązania; aby to skorygować, należy zmienić zakres punktów linearyzacji.

$$(\Phi^T \Phi)(\Phi^T \Phi)^{-1} = \tilde{I} \approx I, \quad (109)$$

$$J_{\Phi} = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n+m} (I_{i,i} - \tilde{I}_{i,i})^2. \quad (110)$$

Zakres punktów linearyzacji (99), (100), które generują nieakceptowalną wartość wskaźnika jakości (110), jest odrzucany i zastępowany przez rozszerzony zakres punktów linearyzacji. Liniowy system dynamiczny SISO można opisać równaniem różnicowym (111)

$$y(k) + \hat{a}_{k-1}y(k-1) + \dots + \hat{a}_{k-n}y(k-n) + \varepsilon = \hat{b}_{k-1}u(k-1) + \dots + \hat{b}_{k-m}u(k-m) \quad (111)$$

$$k \gg n; n \geq m; m, n \in \mathbb{N}; u \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}, \quad (112)$$

zapisując równanie (111) za pomocą macierzy dla kolejnych pomiarów, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & -y_0 & u_2 & u_1 & u_0 \\ -y_3 & -y_2 & -y_1 & u_3 & u_2 & u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_N & -y_{N-1} & -y_{N-2} & u_N & u_{N-1} & u_{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}, \quad (113)$$

gdzie  $\Phi$  jest macierzą danych (99), (100),

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & -y_0 & u_2 & u_1 & u_0 \\ -y_3 & -y_2 & -y_1 & u_3 & u_2 & u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_N & -y_{N-1} & -y_{N-2} & u_N & u_{N-1} & u_{N-2} \end{bmatrix} \quad (114)$$

gdzie  $\hat{\theta}$  jest macierzą estymowanych współczynników modelu liniowego

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_0 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_0 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Rozwiązując układ równań (108) dla funkcji bazowej (111), otrzymujemy estymator  $\hat{\theta}$  współczynników (115) modelu liniowego (111).

#### 4.2.6 Liniowy estymator bloku nieliniowego

W pracy [Latocha (2018a)] wykazano, że możliwe jest zastosowanie estymacji najmniejszych kwadratów funkcji bazowej (95) dla dowolnych wartości wejścia i wyjścia systemu SISO, który jest narażony na zakłócenia o rozkładzie Gaussa. Warunkiem koniecznym stabilności algorytmu LSE dla dowolnych wartości wejścia i wyjścia jest arbitralne przyrównanie  $\eta$  wartości początkowych sygnału  $u(k)$  w macierzy danych (114) do zera. Dla ilości danych dużo większej o rzędu estymowanego modelu

$$N - j \gg n \quad (116)$$

$$k = j, j + 1, \dots, N; N \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}, \quad (117)$$

gdzie:  $n$  wymiar estymatora liniowego,  $N$  ilość punktów linearyzacji,  $k$  krok linearyzacji ze stałym okresem próbkowania  $\Delta t$ . Dla celów optymalizacji parametrycznej wykorzystano funkcję (118), wartości sygnału testującego poprzedzające przedział linearyzacji (117) przyrównano do zera (119)

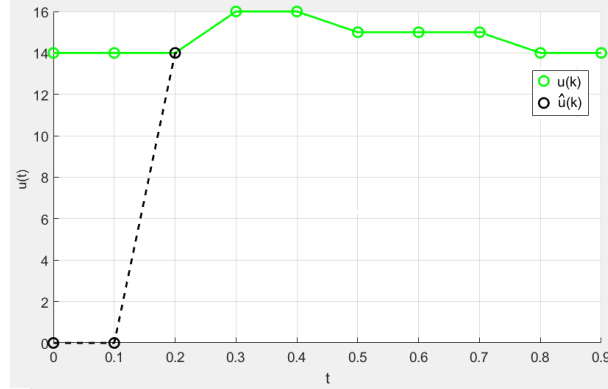
$$h(z) = \frac{1}{z^\eta}; \eta \in \mathbb{N}, \eta > 1, \quad (118)$$

$$u[1, \dots, j] \equiv 0. \quad (119)$$

gdzie  $\eta$  ilość danych  $u(k)$  przyrównanych do zera na początku przedziału linearyzacji. Funkcja  $h(z)$  arbitralnie modyfikuje wartości sygnału wejściowego na początku przedziału linearyzacji, jak pokazano na rysunku (Rys. 13).

$$\tilde{u}(k) = Z^{-1}[h(z)U(z)]; k \in [1, \dots, j + \eta], \quad (120)$$

gdzie  $Z^{-1}$  jest odwrotnym przekształceniem dyskretnym.



Rysunek 13: Formowanie sygnału wejściowego.

Przyjęto założenie, że funkcją celu optymalizacji funkcji (118) dla zmiennej decyzyjnej  $\eta$  jest minimalizacja jej wpływu na dynamikę systemu (111).

$$\Phi \xrightarrow{h(z)} \tilde{\Phi}, \quad (121)$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & -y_0 & \tilde{u}_2 & \tilde{u}_1 & \tilde{u}_0 \\ -y_3 & -y_2 & -y_1 & \tilde{u}_3 & \tilde{u}_2 & \tilde{u}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_N & -y_{N-1} & -y_{N-2} & \tilde{u}_N & \tilde{u}_{N-1} & \tilde{u}_{N-2} \end{bmatrix}. \quad (122)$$

Funkcja (118) jest operatorem na wartościach  $u(k)$  w macierzy danych  $\Phi$  (121), formując macierz (122) do spełnienia założeń klasycznego problemu LSE [Soderstrom and Stoica (1989)]. Operacja wykonana na wartościach sygnału wejściowego jest arbitralną ingerencją w zasadę przyczynowości systemów dynamicznych, jest silną nieliniowością. W algorytmie linearyzacji została przedstawiona jako blok nieliniowy opisany funkcją  $f(\cdot)$ .

#### 4.2.7 Liniowy estymator systemu nieliniowego

W pracy założono, że linearyzacja systemu nieliniowego będzie przeprowadzona dla niezerowych warunków początkowych. Na podstawie analizy zawartej w publikacji [Latocha (2018a)] wartości sygnału  $u(k)$  na początku przedziału linearyzacji zastąpiono wartościami skorygowanymi  $\tilde{u}(k)$  (Rozdział 4.2.6)

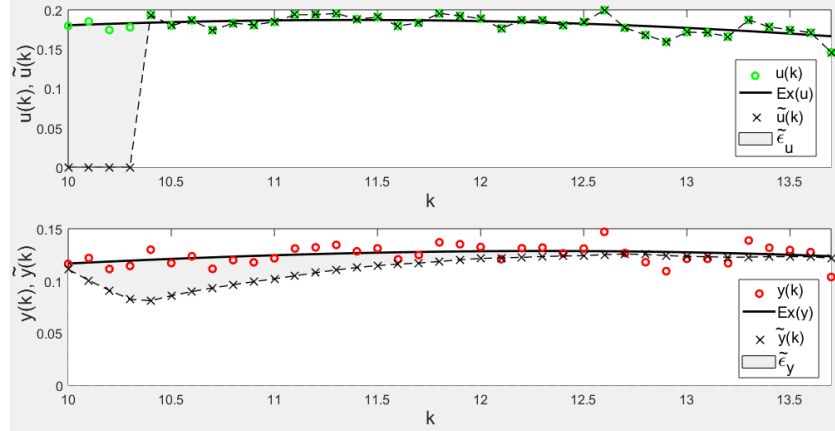
$$u(k) \equiv 0; \quad \forall k \in (1 \dots j - 1) \quad (123)$$

$$\tilde{u}(k) = Z^{-1}[h(z)U(z)]; \quad \forall k \in (j \dots j + \eta) \quad (124)$$

$$\tilde{u}(k) = u(k); \quad \forall k \in (j + \eta + 1 \dots N) \quad (125)$$

Błędy estymacji (126) dodano do błędu równania LSE (111), (Rys. 14).

$$\varepsilon = \left| \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \tilde{u}(k) \right| + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \varepsilon(k). \quad (126)$$



Rysunek 14: Interpretacja danych wykorzystywanych w linearyzacji za pomocą zmodyfikowanego algorytmu LSE błędu równania. Gdzie  $u(k)$ ,  $y(k)$  dane pomiarowe,  $Ex(u)$ ,  $Ex(y)$  wartość oczekiwana,  $\tilde{u}(k)$  wartość skorygowana,  $\tilde{y}(k)$  odpowiedź modelu na sygnał  $\tilde{u}(k)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_u$  błąd sygnału testującego,  $\tilde{\varepsilon}_y$  błąd pomiaru.

$$y(k) + \hat{a}_0 y(k-1) + \dots + \hat{a}_{n-1} y(k-n) + \varepsilon = \hat{b}_0 \tilde{u}(k-1) + \dots + \hat{b}_{m-1} \tilde{u}(k-m). \quad (127)$$

Dla powyższych założeń otrzymano równanie estymatora liniowego (128) na przedziale

$$\hat{\theta}_i = [\tilde{\Phi}_i^T \tilde{\Phi}_i]^{-1} \tilde{\Phi}_i^T Y_i; \quad i \in \mathbb{N}, \quad (128)$$

gdzie  $i$  jest  $i$ -tym przedziałem linearyzacji. Stosując dyskretną transformatę operatorową  $z$ , zlinearyzowany system można zapisać w postaci operatorowej

$$\hat{G}(z) = \frac{\hat{b}_{m-1} z^{m-1} + \dots + \hat{b}_1 z + \hat{b}_0}{z^n + \hat{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 z + \hat{a}_0}. \quad (129)$$

Z definicji transformaty operatorowej  $z$  wzór (129) jest prawdziwy dla sygnałów, które nie narastają szybciej od funkcji wykładniczej (130).

$$Z[f^*(t)] = Z[f(kT)] = F(z), \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) z^{-k} \\ T \in \mathbb{R}, \quad f(k) < k!, \quad f(k) < e^{ak^2}; \quad a > 0, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (130)$$

Zakładając, że na system (129) nie oddziałują zakłócenia, można ułożyć równania optymalizacji wielokryterialnej

$$\hat{G}_i(z) = \frac{Y_i(z)}{\tilde{u}_i(z)}, \quad (131)$$

Funkcja wyjścia w punktach dyskretyzacji dana jest równaniem

$$\hat{Y}_i = Z^{-1}[\hat{G}_i(z) \tilde{u}_i(z)]. \quad (132)$$

Błąd średniokwadratowy wyjścia dany jest równaniem

$$e_i = \frac{1}{N-j} \sum_{k=0}^{N-j} (y_{j+k} - \hat{y}_{j+k})^2, \quad (133)$$

gdzie  $j$  ilość punktów dyskretyzacji.

$$\hat{\theta}_i = f(\Phi_i, \eta_i), \quad (134)$$

wartość optymalna estymatora  $\hat{\theta}_o$  dana jest równaniem

$$\hat{\theta}_o = \underset{\hat{\theta}_i, \eta_{io}}{\operatorname{arg\,inf}}(e_i), \quad (135)$$

gdzie  $\eta_{io}$  jest optymalną ilością skorygowanych punktów sygnału wejściowego  $\tilde{u}(k)$  na początku  $i$ -tego przedziału linearyzacji. Optymalne rozwiązanie linearyzacji systemu nieliniowego SISO dane jest równaniem ##10a

$$\hat{G}_o(z) = f(\hat{\theta}_o, \eta_o). \quad (136)$$

Równanie (136) opisuje model liniowy SISO względem zerowych warunków początkowych. Po konwersji do dziedziny czasu ciągłego z wykorzystaniem ekstrapolatora zerowego rzędu ZOH (ang. Zero-Order Hold) i sprowadzaniu do przestrzeni stanów w postaci kanonicznej sterowalnej otrzymujemy

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{n-1} & -\hat{a}_{n-2} & \cdots & -\hat{a}_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (137)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (138)$$

$$\hat{C} = [\hat{c}_{n-1} \quad \cdots \quad \hat{c}_0]. \quad (139)$$

### 4.2.8 Eksperymenty numeryczne

W celu oceny proponowanego algorytmu linearyzacji porównano wskaźniki jakości dla wartości sygnału testującego i sygnału wyjścia z modelu referencyjnego. Dany jest liniowy system referencyjny opisany równaniem operatorowym (140) w dyskretniej dziedzinie czasu, z krokiem dyskretyzacji  $\Delta t = 0.1[s]$ ,

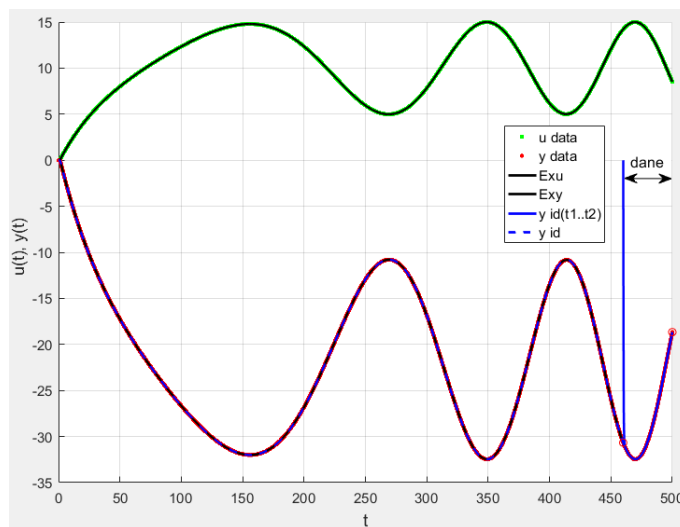
$$G(z) = \frac{-0.3832z^2 - 0.2338z + 0.06683}{z^3 - 1.127z^2 + 0.494z - 0.1129}. \quad (140)$$

System poddano działaniu sygnału testującego

$$u(k) = 5 + 10\sin\left(\frac{\omega k}{2}\right). \quad (141)$$

Dla powyższych uwarunkowań rozważmy wskaźniki jakości proponowanego algorytmu linearyzacji, odnosząc wyniki do modelu referencyjnego. W celu zbadania wpływu nieliniowości na wartość wskaźników jakości wykonano analizę eksperymentalną. Zarchiwizowano sygnał testujący i sygnał wyjściowy z modelu. W przeprowadzonym eksperymencie użyto sygnału testującego o zmiennym okresie (141), do wartości zarchiwizowanego sygnału testującego arbitralnie wprowadzono nieliniowości na końcu przedziału linearyzacji oraz na początku przedziału linearyzacji.

**Model liniowy** Estymując system liniowy nie podlegający zakłóceniom modelem liniowym o tym samym wymiarze algorytmem (4.2.7), uzyskano wyniki obarczone minimalnym błędem wynikającym z błędów numerycznych dla minimalnej ilości danych zapewniającej akceptowalny poziom błędu. (Rys 15).



Rysunek 15: Linearyzacja systemu.

**Model z nieliniowością na końcu przedziału linearyzacji** Na wejście systemu (140) wprowadzono sygnał testujący (141). Dane z wejścia i wyjścia dla ilości dyskretnych próbek  $k \gg N$  zarejestrowano. Na danych wejściowych wykonano operację arbitralnej zmiany wartości sygnału  $u(k)$ , zaburzając końcową wartość w przedziale linearyzacji poprzez tożsamościowe przyrównanie do zera  $u(N-5) \equiv 0$ . Wprowadzone zaburzenie sprawia, że zasada przyczynowości dla liniowego układu dynamicznego nie jest spełniona, system można potraktować jako nieliniowy. Na zmodyfikowanych

danych wykonano linearyzację algorytmem (Rozdział. 4.2.5). W tabeli (Tabela 1) zestawiono wartość wskaźników jakości w zależności od ilości danych użytych w algorytmie linearyzacji dla różnych sygnałów podanych na wejście modelu.

Tablica 1: Wskaźniki jakości linearyzacji w zależności od ilości danych dla arbitralnego zaburzenia sygnału wejściowego  $u(N - 5) \equiv 0$ .

$j$	$e_{(j..N)}$	$e_{1(t)}$	$e_{\delta(t)}$	$e_{u(1..N)}$
$N - 10$	396.8864	219.9079	93.5970	0.0151
$N - 50$	423.0187	219.9079	93.5970	0.0151
$N - 100$	493.6943	219.9079	93.5970	0.0151
$N - 1000$	1451.8	219.9079	93.5970	0.0151
$N - 3000$	3.30e+10	220.3036	93.5978	0.0151

gdzie:  $N = 5000$  ilość danych dyskretnych,  $j$  wskaźnik do wartości początkowej,  $e_{(j..N)}$  błąd (133) wyjścia dla sygnału testującego (141),  $e_{1(t)}$  błąd (133) wyjścia dla sygnału testującego  $1(t)$ ,  $e_{\delta(t)}$  błąd (133) wyjścia dla sygnału testującego  $\delta(t)$ ,  $e_{u(1..N)}$  błąd (133) sygnału wejściowego dla arbitralnego zaburzenia  $u(N - 5) \equiv 0$ .

**Model z nieliniowością na początku przedziału linearyzacji** Eksperyment powtórzono, modyfikując sygnał wejściowy  $u(k)$  poprzez zaburzanie wartość początkowych w przedziale linearyzacji, tożsamościowe przyrównanie do zera  $u(N - j) \equiv 0$ . Wprowadzone zaburzenie sprawia, że zasada przyczynowości dla liniowego układu dynamicznego nie jest spełniona, system można postrzekać jako nieliniowy. Wartość wskaźników jakości zestawiono w tabeli (Tabela 2). Porównując

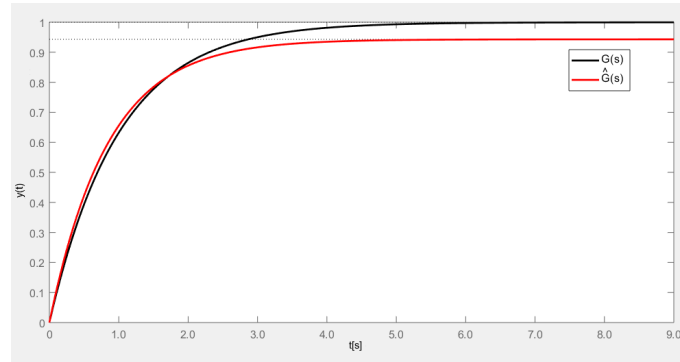
Tablica 2: Modyfikacja sygnału wejściowego  $u(N - j) \equiv 0$  w przedziale linearyzacji.

$j$	$e_{(j..N)}$	$e_{1(t)}$	$e_{\delta(t)}$	$e_{u(1..N)}$
$N - 10$	114,1275	0,0142	3,5951	0.0156
$N - 50$	29.7687	0.0218	5.6054	0.0203
$N - 100$	19.6988	0.0218	5.5959	0.0270
$N - 1000$	0.5552	4.89e-4	0.1163	0.0076
$N - 3000$	7.336	4.90e-4	0.1164	0.0305

wartości wskaźników jakości eksperymentów z tabel (Tab: 1) oraz (Tab: 2). Wykazano, że w algorytmie LSE zerowe wartości sygnału  $u(k)$  na początku przedziału linearyzacji mają wpływ na obciążenie estymatorów. Teza o spełnieniu założeń klasycznego problemu LSE [(Soderstrom and Stoica (1989))] poprzez zastosowanie proponowanego algorytmu linearyzacji została zweryfikowana eksperymentalnie [Latocha (2018a)]. Proponowany algorytm linearyzacji ma tendencje do niedoszacowania stałych czasowych i wzmocnienia estymowanego modelu (Rys. 16), co przedstawiono na rysunku poglądowym (Rys. 16) dla modelu opisanego równaniem

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}. \quad (142)$$



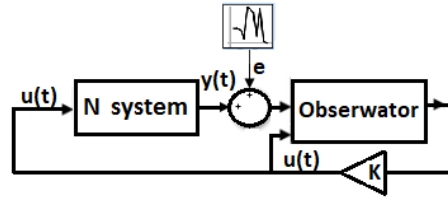


Rysunek 16: Odpowiedź na skok jednostkowy modelu liniowego i jego estymatora.

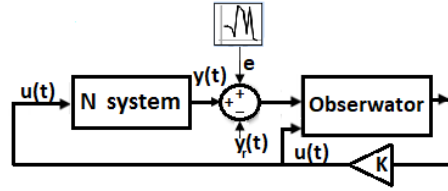
Po przeprowadzeniu eksperymentów numerycznych nasuwa się wniosek, że możliwe jest wyznaczenie ilości danych sygnału  $u(k) \equiv 0$  tożsamościowo przyrównanych do zera na początku przedziału linearyzacji, dla których obciążenia estymatora (136) będzie minimalne.

### 4.3 Linearyzujące sprzężenie zwrotne

Suboptymalne sterowanie systemu nieliniowego regulatorem LQR zostało zrealizowane poprzez wykorzystanie linearyzującego sprzężenia zwrotnego w pętli regulacji, które zrealizowano za pomocą uśrednionego na przedziale obserwatora liniowego (Rozdział 4.2.7) (Rys. 17). W systemach dyskretnych niedokładność synchronizacji obliczeń w czasie w odniesieniu do niepewności pomiaru jest czynnikiem determinującym powstawanie nieakceptowalnych błędów. Z powyższych względów model dyskretny (136) otrzymany w wyniku algorytmu linearyzacji został zastąpiony przez model ciągły w postaci kanonicznej sterowanej (145, 146, 147), którą otrzymano poprzez konwersję modelu dyskretnego (136) z wykorzystaniem algorytmu ekstrapolatora zerowego rzędu o ZOH (ang. Zero-Order Hold).



Rysunek 17: Struktura sterowania systemu nieliniowego z obserwatorem linearyzującym.



Rysunek 18: Struktura sterowania systemu nieliniowego dla trajektorii referencyjnej z obserwatorem linearyzującym.

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t), \quad (143)$$

$$y(t) = \hat{C}x(t); \quad (144)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{n-1} & -\hat{a}_{n-2} & \cdots & -\hat{a}_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (145)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (146)$$

$$\hat{C} = [\hat{c}_{n-1} \quad \hat{c}_{n-2} \cdots \hat{c}_0]. \quad (147)$$

Na estymator (145), (146) systemu nieliniowego (77, 78) nałożono kryterium spełnienia warunków sterowalności (8). Równanie uśrednionego obserwatora linearyzującego dane wzorem

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\hat{A} - \overline{LC})\hat{x}(t) + \overline{L}y(t) + \hat{B}u(t), \quad (148)$$

$$\overline{F} = \hat{A} - \overline{LC}, \quad (149)$$

można rozwiązać ze względu na kryterium asymptotycznej zbieżności (150) do naturalnych zmiennych stanu uśrednionego modelu liniowego w postaci kanonicznej sterowalnej (143), (144).

$$\dot{e}_L = (\hat{A} - \overline{LC})e_L \rightarrow 0. \quad (150)$$

Do wyliczenia optymalnej macierzy wzmocnień obserwatora wykorzystano formułę Ackermanna, [Kailath (1980)], (151), (152).

$$P = eig(\hat{A} - \overline{LC}), \quad (151)$$

$$\overline{L} = (acker(\hat{A}, \hat{C}, P)), \quad (152)$$

Dla uśrednionego obserwatora liniowego o ujemnych wartościach własnych dążących do zera

$$\lambda_L(\overline{F}) \rightarrow 0, \quad (153)$$

zachodzi związek (154)

$$\hat{x} \rightarrow \bar{x}. \quad (154)$$

#### 4.4 Regulator LQR w sterowaniu systemu nieliniowego i silnie nieliniowego

W systemach nieliniowych i silnie nieliniowych SISO (77), (78) aby zastosować regulator LQR, należy przeprowadzić linearyzację systemu w otoczeniu punktu pracy. Jedną z metod przybliżenia dynamiki systemu nieliniowego SISO modelem liniowym jest estymacja naturalnych zmiennych stanu w otoczeniu punktu pracy. Uwzględniając założenia do projektowania regulatorów LQR (Mitkowski (1984)), można zaprojektować regulator suboptymalny dla systemu nieliniowego (77), (78) w otoczeniu punktu referencyjnego, który będzie minimalizował błąd średniokwadratowy na trajektoriach estymatora liniowego oraz obserwator w linearyzującym sprzężeniu zwrotnym. Efektywna linearyzacja często sprowadzana jest do rozwiązania nominalnego w punkcie  $\{x_0(\cdot), u_0(\cdot)\}$  [Kailath (1980)]. Załóżmy, że rozszerzymy przedział linearyzacji na otoczenie punktu referencyjnego  $\{x_0(\cdot), u_0(\cdot)\}$  (155), (156)

$$x(t) = x_0(t) + \delta(x) \quad (155)$$

$$u(t) = u_0(t) + \delta(u) \quad (156)$$

Dla systemu nieliniowego obserwowalnego i sterowalnego, opisanego równaniami (77), (78), można dobrać system liniowy opisany równaniami (157), (158), który będzie przybliżał naturalne zmienne stanu systemu nieliniowego wokół punktu referencyjnego z akceptowalnym, minimalnym błędem (159)

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \quad (157)$$

$$y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + e_{min}, \quad (158)$$

gdzie  $e_{min}$  jest minimalnym błędem estymacji

$$e_{min} = \inf[(y(t, \psi) - \hat{y}(t))^2 + (\dot{y}(t, \psi) - \dot{\hat{y}}(t))^2 + (\ddot{y}(t, \psi) - \ddot{\hat{y}}(t))^2 + \dots + (y^{(n)}(t, \psi) - \hat{y}^{(n)}(t))^2]. \quad (159)$$

Dla systemu liniowego opisanego równaniami (157), (158) można zaprojektować regulator LQR (Rozdział 3.2), dla którego zmienne stanu w prawie sterowania (3) będą uśrednionymi estymatami

$$u(t) = -K\hat{x}(t). \quad (160)$$

Otwartym problem w zagadnieniu sterowania (160) systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi pozostaje obciążenie estymatorów (159), które zwracają wartości niedoszacowane lub przeszacowane. Estymacja dynamiki systemu nieliniowego i silnie nieliniowego poprzez wykorzystanie modelu liniowego jest niedokładnym przybliżeniem, które obarczone jest błędem, różnice pomiędzy modelem fizycznym a jego liniowym przybliżeniem sprawiają, że regulator LQR obliczony dla estymatora liniowego (157), (158) jest niedokładny.

## 4.5 Obserwator o wysokim wzmocnieniu

Problem obciążenia estymatorów w sterowaniu systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi można skorygować poprzez zastosowanie obserwatora [Zheng et al. (2017)] o wysokim wzmocnieniu HG (ang. High-Gain Observer), co wykazano w pracach [Khalil (2015)], [Khalil and Hassan (2017)]. Propozycję modyfikacji obserwatora dla tak postawionego problemu wraz z dowodami matematycznymi zamieszczono w pracy [Khalil (2015)], dowodząc, że obserwator o wysokim wzmocnieniu w pewnym zakresie zmiennych stanu posiada własności korygujące w pętli sprzężenia zwrotnego stabilizacji liniowo kwadratowej dla pewnych klas systemów nieliniowych. Prace o tematyce badawczej zastosowania obserwatorów o wysokim wzmocnieniu w sterowaniu systemów nieliniowych są obecnie jednym z głównych kierunków badawczych [Wei et al. (2010)], [Zheng et al. (2017)], [Curtain et al. (2017)], [Astolfi and Marconi (2015)], [Andrieu et al. (2016)], [Assche et al. (2011)], [Robenack (2004)]. Obserwator linearyzująco-korygujący o wysokim wzmocnieniu jest jednym z głównych założeń tezy (Teza 1) o obserwatorze linearyzującym w pętli sprzężenia zwrotnego regulatora LQR. Z powyższych względów w rozważaniu i dyskusji nad problematyką obserwatora o wysokim wzmocnieniu w rozdziale przytoczono argumentację i dowody matematyczne zamieszczone w publikacji [Khalil (2015)], do których konkluzje, dowody matematyczne, weryfikację na modelach eksperymentalnych i propozycje poszerzenia zagadnienia zamieszczono w następnym rozdziale. Rozważając system opisany równaniami [Khalil (2015)], [Khalil and Hassan (2017)],

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (161)$$

$$x_2 = \Phi(x, u) \quad (162)$$

$$y = x_1 \quad (163)$$

gdzie  $x = (x_1, x_2)^T$ , funkcja  $\Phi$  spełnia lokalnie warunek Lipschitza i  $x(t)$  i  $u(t)$  są ograniczone dla każdego  $t \geq 0$ , można zbudować obserwator

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + h_1(y - \hat{x}_1) \quad (164)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \Phi_0(\hat{x}, u) + h_2(y - \hat{x}_1) \quad (165)$$

gdzie  $\Phi_0 = \Phi(x, u)$  jest modelem nominalnym  $\Phi = \Phi(x, u)$ . Nie ma wymogu narzucenia założeń, że  $\Phi_0$  jest takie samo jak  $\Phi$ . Niezależnie od wyboru  $\Phi_0$  możemy założyć, że

$$|\Phi_0(z, u) - \Phi(x, u)| \leq L\|x - z\| + M \quad (166)$$

Właściwości korekcyjne obserwatora o wysokim wzmocnieniu można zaobserwować w dziedzinie czasu poprzez skalowanie błędu estymacji. Niech

$$\eta_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\varepsilon}, \quad \eta_2 = \tilde{x}_2 \quad (167)$$

wtedy

$$\varepsilon \dot{\eta} = F\eta + \varepsilon B\delta \quad (168)$$

gdzie

$$F = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (169)$$

Macierz  $F$  jest macierzą Hurwitza ponieważ  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są dodatnie. Używając ograniczeń  $\|\delta\| \leq L\|\tilde{x}\| + M \leq L\|\eta\| + M$  i funkcji będącej kandydatem na funkcjonal Lapunowa

$$V = \eta^T P \eta \quad (170)$$

gdzie  $P$  jest rozwiązaniem równania

$$PF + F^T P = -I \quad (171)$$

otrzymujemy

$$\varepsilon \dot{V} = -\eta^T \eta + 2\varepsilon \eta^T P B \delta \leq -\|\eta\|^2 + 2\varepsilon L \|PB\| \|\eta\|^2 + 2\varepsilon M \|PB\| \|\eta\| \quad (172)$$

Dla

$$\varepsilon L \|PB\| \leq \frac{1}{4} \quad (173)$$

$$\varepsilon \dot{V} \leq -\frac{1}{2} \|\eta\|^2 + 2\varepsilon M \|PB\| \|\eta\|. \quad (174)$$

Wynika z tego [Khalil (2015)] że  $\|\eta\|$  i w konsekwencji  $\|\hat{x}\|$  jest ostatecznie ograniczona przez  $\varepsilon cM$ . Z dowodów przeprowadzonych w [Khalil (2015)]

$$\|\eta(t)\| \leq \max\{ke^{-\frac{at}{\varepsilon}} \|\eta(0)\|, \varepsilon cM\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (175)$$

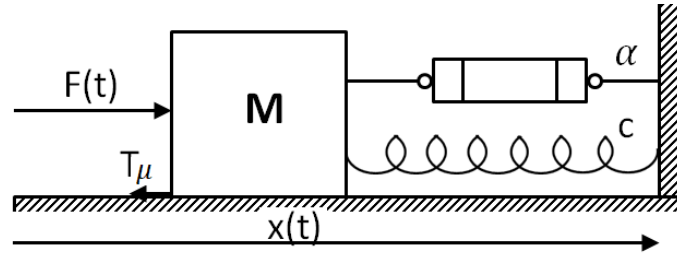
wynika, że estymata obserwatora o wysokim wzmocnieniu jest ograniczona.

#### 4.6 Zastosowanie obserwatora o wysokim wzmocnieniu

Dla systemu nieliniowego sterowanego w linearyzującym sprzężeniu zwrotnym warunkiem koniecznym stabilizacji ze wzoru na prawo sterowania jest równoważenie bilansu energii (dostarczonej, rozpraszanej, magazynowanej) (176).

$$E_{LQR}(t, \hat{u}, \hat{x}_L) \geq E_{NL}(t, u, x) \quad (176)$$

Rozważmy system dynamiczny (Rys. 19) opisany równaniem (177), gdzie:  $M$  masa,  $F(t)$  siła (sterowanie),  $x(t)$  położenie środka masy,  $c$  stała sprężyny,  $\alpha$  stała tłumienia,  $T_\mu$  siła tarcia statycznego (nieliniowość). Rozważmy przypadek, gdy tarcie styczne nie występuje  $T_\mu = 0$ .



Rysunek 19: Model systemu dynamicznego.

Opisując system równaniem różniczkowym

$$M\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + cx = F(t) - T_\mu \quad (177)$$

stosując podstawienie

$$x_1 = x \quad (178)$$

$$x_2 = \dot{x} \quad (179)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F}{M} - \frac{\alpha}{M}x_2 - \frac{c}{M}x_1 \end{aligned} \quad (180)$$

równanie (180) możemy zapisać w przestrzeni stanów

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{M} & -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F \quad (181)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (182)$$

gdzie odpowiednie macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{M} & -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0. \quad (183)$$

Obliczając regulator LQR wg (Rozdział 3.2), otrzymujemy wzór na prawo sterowania

$$F_1(t) = -K_1x(t). \quad (184)$$

Rozważmy przypadek, gdy tarcie statyczne jest niezerowe  $T_\mu \neq 0$  otrzymujemy

$$F_2(t) = -K_2x(t) + T_\mu. \quad (185)$$

Założmy, że system (185) znajduje się w niezerowym stanie równowagi,  $x(t) \neq x_0(t) \rightarrow F_2(t) \neq 0$ ,  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{d^2x(t)}{dt} = 0$ . System pozostanie w tym stanie do czasu, kiedy wartość sterowania nie zrównoważy siły tarcia  $F_2(t) \geq T_\mu$ . Zakładamy zwiększenie wartości sterowania poprzez zwiększenie wzmocnienia statycznego  $K_2$ . Rozważmy zachowanie systemu (185) dla  $F_2(t) > T_\mu$ , z warunkiem początkowym  $x(t) \neq x_0(t)$ . System rozpocznie zmianę położenia  $\frac{dx(t)}{dt} \neq 0$ , ale równocześnie zachodzi zmiana warunków równowagi  $T_\mu = 0$ . Dla  $T_\mu = 0$  obowiązuje prawo sterowania (184), dla którego w systemie działa przeszacowane sterowanie  $u(t) = f(K_2)$ . Przeszacowane sterowanie jest funkcją macierzy wzmocnienia  $K_2$  zmiennych stanu, przyjmuje wartość zero, gdy wszystkie zmienne stanu osiągną zero. W chwili  $u(t_{0+})$  sterowania, po zrównoważeniu siły tarcia, wartość dla  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{d^2x(t)}{dt} \neq 0$ , siła tarcia przestała oddziaływać. Wartość sterowania w prawie (184) zależy od zmiennej stanu położenia i prędkości, jest przeszacowana, nadaje systemowi nadmierną dynamikę w zadaniu stabilizacji  $x_0(t) = 0$ . Dynamika, którą przeszacowane wzmocnieniem statycznym sterowanie nada zmiennym stanu w systemie bez tarcia, prowadzi do znaczącego przesterowania poza punkt równowagi  $x_0(t)$ , oscylacji oraz cykli granicznych. Założmy, że wzmocnienie regulatora LQR zostało obliczone dla systemu liniowego (184), w którym nie występuje tarcie statyczne. Aby zrównoważyć siłę tarcia statycznego we wzorze (185), należy zwiększyć wartość sterowania. Jednym z rozwiązań na zwiększenie wartości sterowania jest korekcja wartości estymat w prawie sterowania (18), które będą funkcją zależną od sterowania, wyjścia i estymat wartości własnych, daną zależnością

$$F(t) = -K\hat{x}(f(u(t)), g(y(t)), \hat{\lambda}, t). \quad (186)$$

W równaniu (186) można tak dobrać  $f(u(t))$ ,  $g(y(t))$ ,  $\hat{\lambda}$ ,  $t$  aby sterowanie zrównoważyło siłę tarcia statycznego  $T_\mu$ . Jeśli wartości estymat zmiennych stanu wprowadzane do prawa sterowania można zmieniać w funkcji  $\hat{x}(f(u(t)), g(y(t)), \hat{\lambda}, t)$ , to możemy założyć nadmiarowość, przeszacowanie wzmocnienia funkcji, które szybko zanika, gdy wartości estymat dążą do wartości  $x_0(t)$ . Z prawa sterowania (18) wynika, że system liniowy sterowany regulatorem o przeszacowanym wzmocnieniu szybciej osiągnie wartości zmiennych stanu w otoczeniu wartości referencyjnej (Rozdział 4.5), sterowany regulatorem o mniejszym wzmocnieniu wolniej osiągnie wartość referencyjną lub nie osiągnie wartości referencyjnej. Bazując na założeniach obserwatora o wysokim wzmocnieniu [Khalil (2015)], zmodyfikowano algorytm wyliczania macierzy obserwatora (34), wprowadzając współczynnik korekcyjny statycznej na sterowanie  $\beta$  i współczynnik korekcyjny dynamiczny  $\tau_{cr}$  na stałe czasowe modelu estymatora liniowego (143), (144) w równaniu obserwatora (199). Przeszacowane wzmocnienie dynamiczne posiada własności korygujące niepewność modelu w sterowaniu LQR [Khalil (2015)], [Khalil and Hassan (2017)], (Rozdział 4.5). Dla systemu nieliniowego SISO estymator liniowy wokół punktu referencyjnego można przedstawić w formie równania filtru inercyjnego o nieskończonej odpowiedzi (187).

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{b}_m s^m + \hat{b}_{m-1} s^{m-1} + \dots + \hat{b}_1 s + \hat{b}_0}{s^n + \hat{a}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0}; \quad m < n; \quad m, n \in \mathbb{N}; \quad \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{C} \quad (187)$$

Na podstawie (Lemma 11.3) [Khalil (2015)] niepewność modelu uwzględniono poprzez wprowadzenie dodatkowej inercji (188) do modelu (187). Zakładając, że zaburzenie pomiarów [Khalil (2015)] będzie reprezentowane przez transmitancję

$$G_f(s) = \frac{\beta}{(sT_f + 1)^n}; \quad T_f \in \mathbb{R}; \quad s \in \mathbb{C} \quad (188)$$



gdzie  $\beta$  współczynnik korekcji wzmocnienia statycznego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{T_f \rightarrow 0} G_f(s)) = 1 \quad (189)$$

Wykorzystując arytmetykę bloków transmitancji (190), dla warunku (189) zachodzi (191).

$$\tilde{G}(s) = G(s)G_f(s) \quad (190)$$

$$\tilde{G}(s) \rightarrow \hat{G}(s) \quad (191)$$

Wprowadzenie dodatkowej inercji (190) zmienia stałe czasowe modelu liniowego estymatora (187), konsekwencją jest zmiana wartości macierzy obserwatora oraz macierzy w równaniu Riccatiego dla problemu liniowo kwadratowego (20). Równoważną korekcję do (190) przy założeniu  $\beta = 1$  można wykonać poprzez wprowadzenie operatora  $\tau_{cr}$  korygującego stałe czasowe w równaniu stanu i wyjścia

$$\dot{x}(t) = A(\tau_{cr})x(t) + B(\tau_{cr})u(t), \quad (192)$$

$$y(t) = C(\tau_{cr})x(t), \quad (193)$$

gdzie  $\tau_{cr}$  współczynnik korekcji stałych czasowych. Wykorzystując podstawienie (194) dla (187) oraz zakładając, że zmienna operatorowa przyjmuje wartość

$$s_o = \tau_{cr}s; ; \tau_{cr} \in \mathbb{R}. \quad (194)$$

Po przekształceniu modelu (187) do postaci kanonicznej sterowalnej równań stanu otrzymujemy

$$A(\tau_{cr}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_{cr}}a_{n-1} & -\frac{1}{\tau_{cr}^2}a_{n-2} & \cdots & -\frac{1}{\tau_{cr}^{n-1}}a_2 & -\frac{1}{\tau_{cr}^n}a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (195)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (196)$$

$$C(\tau_{cr}) = \left[ \frac{1}{\tau_{cr}}c_{n-1} \quad \frac{1}{\tau_{cr}^2}c_{n-2} \quad \cdots \quad \frac{1}{\tau_{cr}^{n-1}}c_1 \quad \frac{1}{\tau_{cr}^n}c_0 \right]. \quad (197)$$

Równanie obserwatora z uwzględnieniem korekcji HG (188) lub (194) przyjmuje formę (198),

$$\dot{\hat{x}} = A(\tau_{cr})\hat{x} + \beta Bu + L(y - C(\tau_{cr})\hat{x}), \quad (198)$$

dla modelu zlinearyzowanego (Rozdział 4.2.7) otrzymujemy

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}(\tau_{cr})\hat{x} + \beta \hat{B}u + L(y - \hat{C}(\tau_{cr})\hat{x}). \quad (199)$$

Zastosowanie regulatora LQR z obserwatorem linearyzującym (148) w sprzężeniu zwrotnym dla systemu nieliniowego jest rozwiązaniem suboptymalnym, dobrym odniesieniem do dalszych modyfikacji. Z dużym prawdopodobieństwem można przyjąć założenie, że wartości macierzy wzmocnienia

obserwatora  $L$ ,  $A - LC$  dla regulatora LQR będą niedoszacowane lub przeszacowane. Wykorzystując algorytm obliczania macierzy obserwatora według wzoru Ackermanna [Kailath (1980)], można wyliczyć skorygowane macierze  $\bar{L}$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{C}$  dla obserwatora liniowego (199) o wysokim wzmocnieniu. Współczynniki korekcyjne  $\beta$ ,  $\tau_{cr}$  zmieniają dynamikę obserwatora poprzez zmianę wartości macierzy  $L$  wzmocnienia błędu zbieżności oraz wartości macierzy  $A - LC$  estymacji stanu.

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\hat{A}(\tau_{cr}) - \bar{L}\hat{C}(\tau_{cr}))\hat{x}(t) + \bar{L}y(t) + \beta\hat{B}u(t) \quad (200)$$

$$\bar{F} = \hat{A}(\tau_{cr}) - \bar{L}\hat{C}(\tau_{cr}). \quad (201)$$

$$P = eig(\bar{F}), \quad (202)$$

$$L = (acker(\hat{A}, \hat{C}, P)), \quad (203)$$

Obserwator (148) zbudowany na bazie estymatora liniowego (136) dla systemu nieliniowego (77) (78) jest obserwatorem niedokładnym, estymaty zmiennych stanu są obciążone. Zadanie sterowania optymalnego sprowadza się do optymalnej linearyzacji (148) oraz korekcji dynamicznej estymat z wykorzystaniem obserwatora o wysokim wzmocnieniu (4.5), (199). Obserwator (199) zbudowany z wykorzystaniem algorytmu linearyzacji (Rozdział 4.2.7) dla systemu nieliniowego (77), (78) nie spełnia warunku asymptotycznej zbieżności (204), (205).

**Definicja 5.** Asymptotyczna zbieżność [Bronsztajn et al. (2007)]. Ciąg liczb  $a_n : N = 1, 2, \dots$  zbiega do granicy  $a$  (posiada granicę  $a$ ) jeżeli  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ , takie że  $\forall N > N_\varepsilon$

$$|a_N - a| < \varepsilon, \quad (204)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (205)$$

**Definicja 6.** Zbieżność według prawdopodobieństwa [Lachowicz (2012)], [Bronsztajn et al. (2007)]. Ciąg zmiennych losowych  $X_N : N = 1, 2, \dots$ , gdzie indeks  $N$  oznacza liczebność próby, jest zbieżny według prawdopodobieństwa  $P$  do liczby  $a$ , jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0. \quad (206)$$

Oznacza to, że w granicy prawdopodobieństwa  $P$  zdarzenia wartość zmiennej losowej  $X_n$  odchyli się od wartości średniej  $\mu$  o więcej niż dowolnie mała liczba  $\varepsilon$  wynosi zero. Zbieżność według prawdopodobieństwa oznacza się jako  $X_n \xrightarrow{P} a$  oraz mówi się, że  $a$  jest granicą prawdopodobieństwa (*plim*) dla ciągu  $X_n$ , (*plim* $X_N = a$ ).

W przypadku zmiennej losowej ciągłej prawdopodobieństwo tego, że przyjmuje ona ustaloną wartość  $x_i$ , jest równe 0. Rozważa się więc prawdopodobieństwo tego, że wartości zmiennej  $X$  leżą w ustalonym skończonym przedziale  $[a, b]$ . Jeśli istnieje funkcja  $f(t)$  zwana gęstością prawdopodobieństwa, że zachodzi wzór

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt, \quad (207)$$

to mówimy o absolutnie ciągłej funkcji rozkładu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (208)$$

i odpowiednio o absolutnie ciągłej zmiennej losowej [Bronsztejn et al. (2007)].

**Definicja 7.** Zbieżność wartości według rozkładu [Lachowicz (2012)], [Bronsztejn et al. (2007)]. Ciąg zmiennych losowych  $X_n : N = 1, 2, \dots$ , gdzie indeks  $N$  oznacza wielkość próby, zbiega według rozkładu do ciągłej zmiennej losowej  $X$ , wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_N(\xi) = F(\xi); \forall \xi \in R \quad (209)$$

gdzie  $F_N$  jest dystrybuantą  $x_N$ , oraz  $F$  jest ciągłą dystrybuantą zmiennej losowej  $X$ .

Dla wartości własnych (211) obserwatora liniowego (199) estymaty stanu są asymptotycznie zbieżne do uśrednionych wartości stanu estymatora liniowego (137), (138), (139). Z własności algorytmu LSE dla funkcji bazowej ARMAX wynika, że zmienne stanu estymatora liniowego (137), (138), (139) są zbieżne do uśrednionych na przedziale zmiennych stanu systemu nieliniowego (210), (77) wg prawdopodobieństwa (Definicja 6), (206), (212), (213), (214).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t, \beta, \tau_{cr}) \xrightarrow{P} \xi, \quad (210)$$

$$\lambda(\hat{A}(\beta, \tau_{cr}) - L\hat{C}(\beta, \tau_{cr})) < 0, \quad (211)$$

$$\hat{x}_1 \xrightarrow{P_1} \xi_1 \quad (212)$$

$$\hat{x}_2 \xrightarrow{P_2} \xi_2 \quad (213)$$

$$\hat{x}_3 \xrightarrow{P_3} \xi_3 \quad (214)$$

Dla przedstawionych założeń otrzymujemy prawo sterowania systemu nieliniowego z obserwatorem (199) na przedziale linearyzacji  $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$

$$J_{NL} = \int_0^{\infty} (\hat{x}^T(t, \beta, \tau_{cr})Q\hat{x}(t, \beta, \tau_{cr}) + \tilde{u}^T(t)R\tilde{u}(t))dt, \quad (215)$$

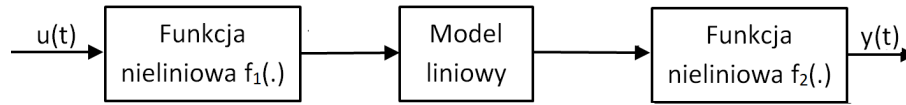
$$K_{NL}(\beta, \tau_{cr}) = R^{-1}(\beta, \tau_{cr})\hat{\beta}\hat{B}^T P(\beta, \tau_{cr}), \quad (216)$$

$$\hat{A}^T(\tau_{cr})P + P\hat{A}(\tau_{cr}) - P\hat{\beta}\hat{B}R^{-1}\hat{\beta}\hat{B}^T P + Q = 0, \quad (217)$$

$$u(t) = K_{NL}(\beta, \tau_{cr})\hat{x}(t, \beta, \tau_{cr}). \quad (218)$$

## 4.7 Sterowanie modelami nieliniowymi Hammersteina-Wienera

Do zweryfikowania hipotez postawionych w pracy wykorzystano modele Hammersteina-Wienera. W strukturze modelu Hammersteina-Wienera można wydzielić model liniowy oraz funkcje nieliniowe (Rys. 20) [Schon et al. (2013)]. Dla różnych struktur nieliniowości w modelach Hammersteina-Wienera skorygowano macierze obserwatora modelu liniowego (198) poprzez zastosowanie optymalizacji numerycznej dla współczynników korekcyjnych  $\beta$ ,  $\tau_{cr}$  (199), (217) funkcji celu minimalizującej błąd wyjścia. W celu weryfikacji hipotezy o istnieniu obserwatora uśredniająco-linearyzującego w układzie sterowania (17) założono że funkcja nieliniowa w strukturze modelu Hammersteina-Wienera [Schon et al. (2013)] będzie reprezentowała niepewność modelu. Załóżmy, że istnieje wartość wzmocnienia regulatora LQR [Grabowski (2013)], [Grabowski (2017)], (Rys. 17), która spełnia kryterium sterowalności dla systemu nieliniowego.



Rysunek 20: Model systemu nieliniowego Hammersteina-Wienera.

Rozważono dwa przypadki:

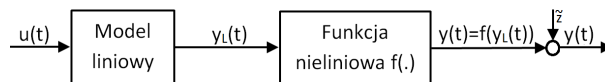
1. Znany jest model liniowy, na podstawie którego obliczono obserwator i regulator LQR, nieznana jest funkcja nieliniowa, której wpływ na dynamikę systemu w układzie sterowania (17) skorygowano poprzez zastosowanie korekcji obserwatora (198) o wysokim wzmocnieniu HG i korekcji macierzy regulatora LQR (216), (Rozdział 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3).
2. Nieznany jest model liniowy oraz funkcja nieliniowa, dla tego przypadku model liniowy estymowano algorytmem opisanym w (Rozdziale 4.2.7). Korekcję wpływu nieliniowości na dynamikę systemu oraz błędu estymatora liniowego (136) w układzie sterowania (17) wykonano poprzez zastosowanie obserwatora o wysokim wzmocnieniu (199) oraz korekcję macierzy regulatora LQR (216), (Rozdział 4.8).

Współczynniki korekcyjne  $\beta$  i  $\tau_{cr}$  obliczono metodą optymalizacji numerycznej dla funkcji celu (219) minimalizującej błąd wyjścia modelu, przy założeniu stałych wartości własnych obserwatora  $\lambda_o$  oraz macierzy wagowych regulatora LQR  $Q = 1$ ,  $R = 1$ .

$$e_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_r)^2 \quad (219)$$

### 4.7.1 Model z nieliniowością na wyjściu

Dany jest system dynamiczny opisany równaniami stanu (220), (221), (222) w postaci kanonicznej sterowalnej z nieliniowością (223) na wyjściu (Rys. 21).



Rysunek 21: Model Wienera z nieliniowością na wyjściu.

$$A = \begin{bmatrix} -6.10 & -10.65 & -3.92 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (220)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (221)$$

$$C = [ 0 \ 0 \ 3.92 ], \quad (222)$$

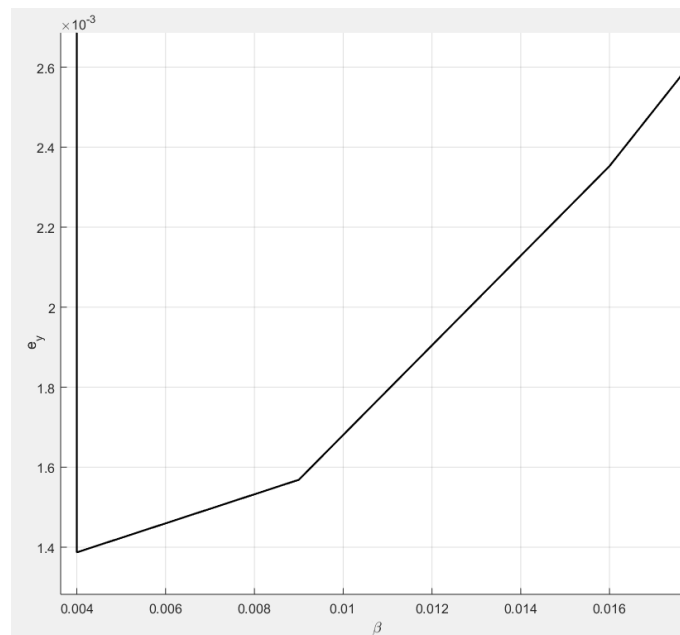
$$y(t) = 5\sin(3Cx(t)). \quad (223)$$

Systemy nieliniowe nie spełniają zasady superpozycji, w związku z tym do linearyzacji wykorzystano sygnał testujący zmienny (Rys. 26). Do wyjścia systemu dodano zakłócenia. Rozważono przypadek zakłóceń nieskorelowanych (224) w strukturze sterowania (Rys. 17) oraz zakłóceń skorelowanych (225) w strukturze sterowania (Rys. 18).

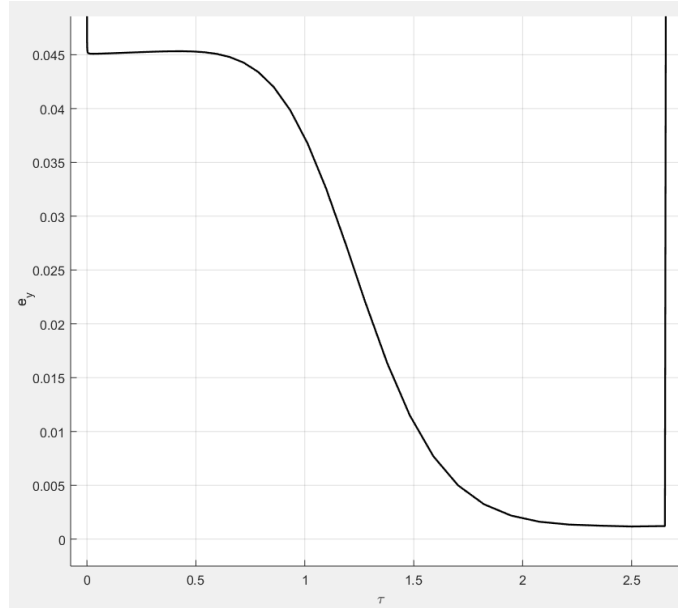
$$\tilde{z}_1, \quad (224)$$

$$\tilde{z}_2 = y(t) - y_r(t) + \tilde{z}_1. \quad (225)$$

Jako wskaźnik jakości sterowania dla układu (17) w eksperymentach numerycznych przyjęto błąd średniokwadratowy (219) względem wartości referencyjnej, która przyjmuje zero w zadaniu stabilizacji lub jest funkcją czasu (Rys. 26) w zadaniu sterowania po trajektorii referencyjnej (ang. tracking).

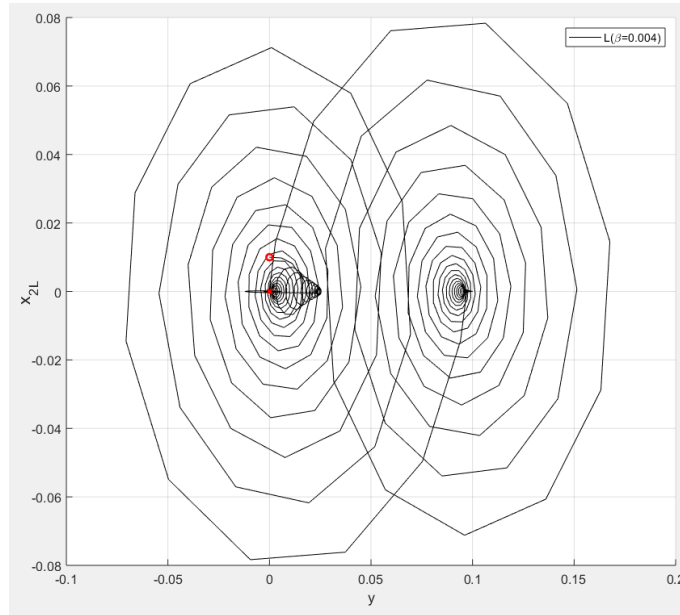


Rysunek 22: Zależność błędu wyjścia modelu (223) w układzie sterowania (Rys. 17) w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .



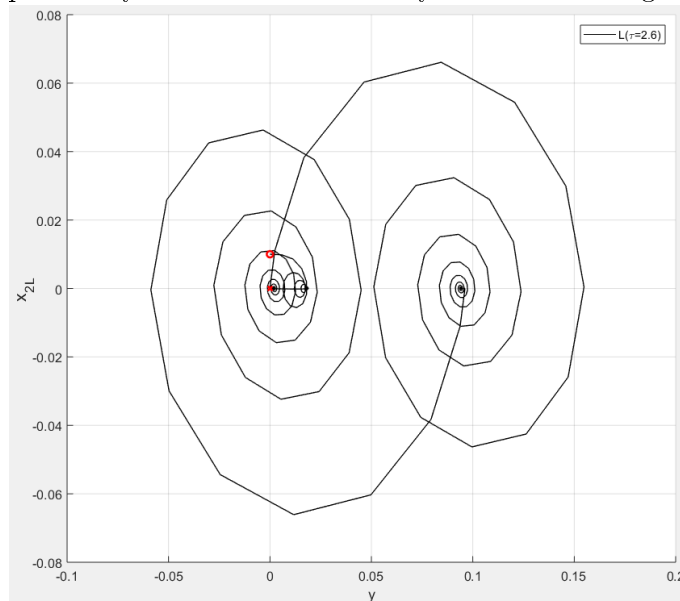
Rysunek 23: Zależność błęd wyjścia (219) układu regulacji (Rys. 17) w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$ .

Metodą topologiczną płaszczyzny fazowej przeprowadzono badanie modelu (223), które pozwala określić podstawowe właściwości dynamiczne zmiennych stanu w dziedzinie czasu oraz oszacować stabilność systemu. Wykresy stabilizacji systemu (223) w układzie sterowania (Rys. 17) przedstawiono na płaszczyźnie fazowej (Rys. 24) dla różnych stanów pracy. Dla powyższych uwarunkowań wykresy na płaszczyźnie fazowej przedstawiono w układzie współrzędnych wyjścia modelu  $y(t)$  i zmiennej stanu  $x_{2L}(t) = \dot{x}_{1L}(t)$  gdzie  $x_{1L}(t) = y_L(t)$ , wyróżnionej z modelu struktury liniowej. Przeprowadzono badanie układu regulacji LQR z obserwatorem linearyzującym w zadaniu sterowania po trajektorii referencyjnej (Rys. 18).

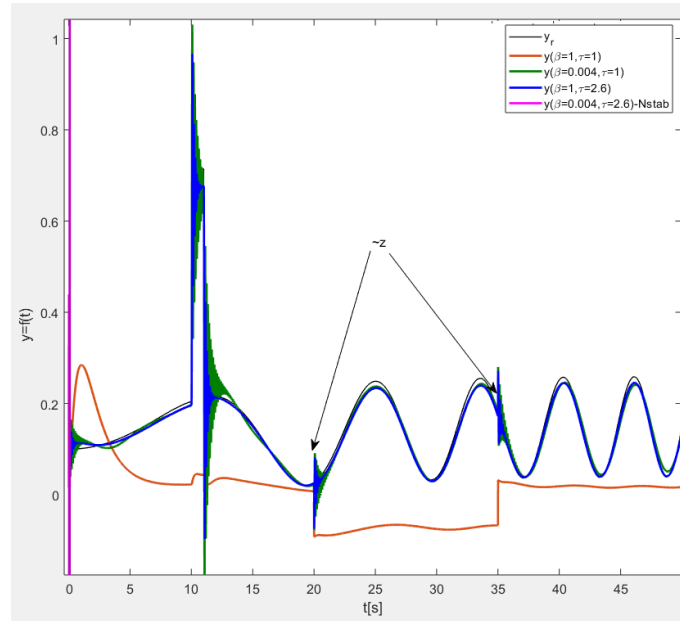


Rysunek 24: Trajektorie stanu w zadaniu stabilizacji modelu (223) dla optymalnej wartości współczynnika  $\beta = 0.004$  w dwóch stanach pracy.

Założmy, że istnieje wartość wzmocnienia regulatora [Grabowski (2013)], [Grabowski (2017)], (Rys. 17), która spełnia kryterium sterowalności systemu nieliniowego (220), (223).



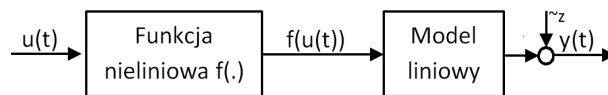
Rysunek 25: Stabilizacja modelu (223) dla optymalnej wartości współczynnika  $\tau_{cr} = 2.6$  w dwóch stanach pracy.



Rysunek 26: Sterowanie modelu (223) po trajektorii referencyjnej bez korekcji oraz z korekcją dla optymalnych wartości wsp.  $\beta$  i  $\tau_{cr}$ .

#### 4.7.2 Model z nieliniowością na wejściu

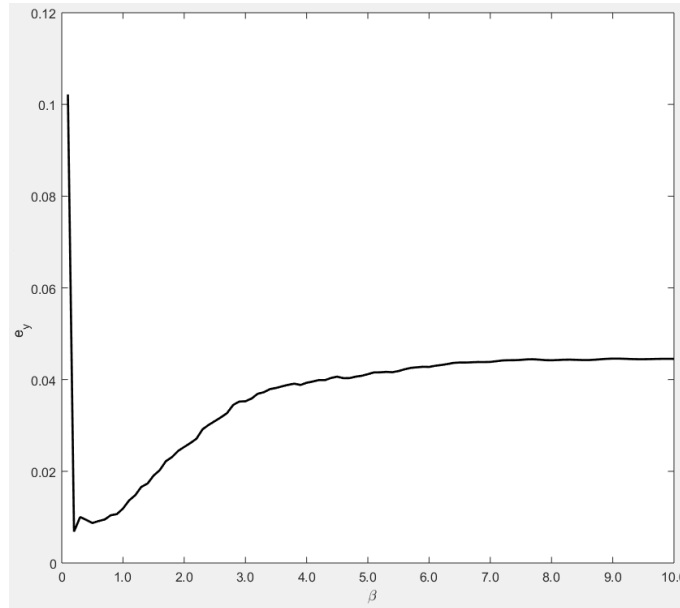
Dany jest system dynamiczny opisany równaniami stanu (220), (221), (222) w postaci kanonicznej sterowalnej z nieliniowością (226) na wejściu (Rys. 21).



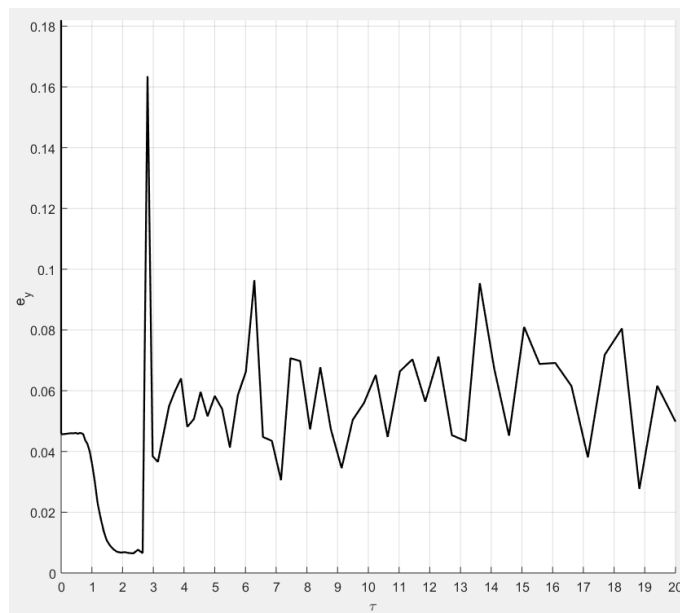
Rysunek 27: Model Hammersteina z nieliniowością na wejściu.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(5\sin(5u(t))), \quad (226)$$

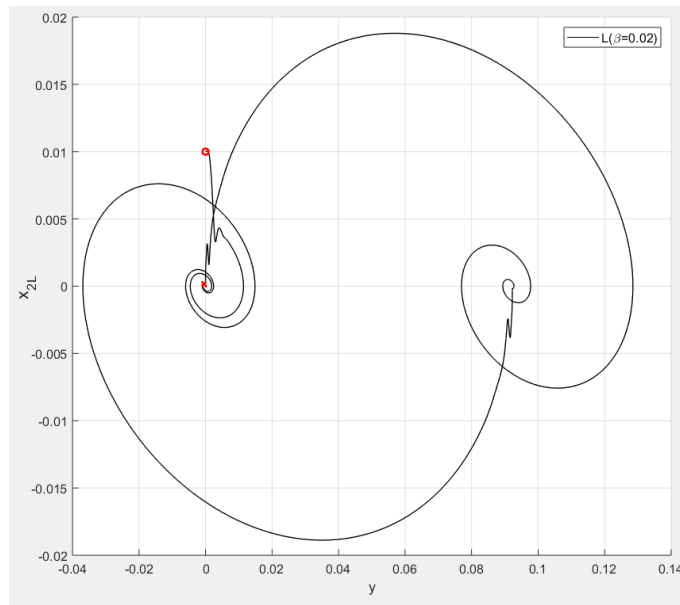




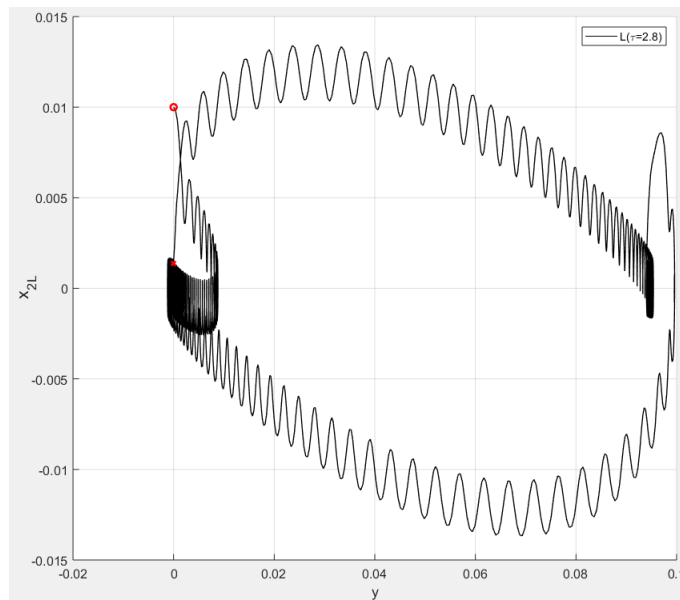
Rysunek 28: Zależność błędu wyjścia modelu (226) układu regulacji (Rys. 17) w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .



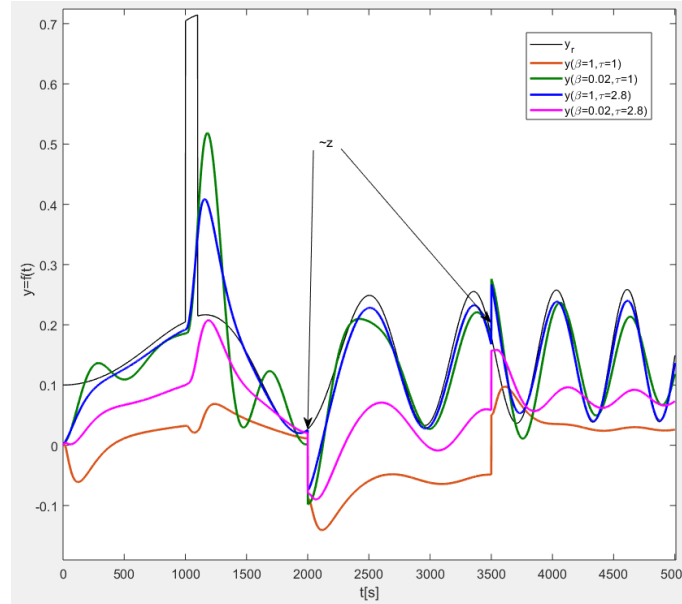
Rysunek 29: Zależność błędu wyjścia modelu (226) układu regulacji (Rys. 17) w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$ .



Rysunek 30: Trajektorie stanu w zadaniu stabilizacji modelu (226) w układzie regulacji (Rys. 17) dla optymalnej wartości współczynnika  $\beta = 0.02$  w dwóch stanach pracy.



Rysunek 31: Trajektorie stanu w zadaniu stabilizacji modelu (226) w układzie regulacji (Rys. 17) dla optymalnej wartości współczynnika  $\tau_{cr} = 2.8$  w dwóch stanach pracy.



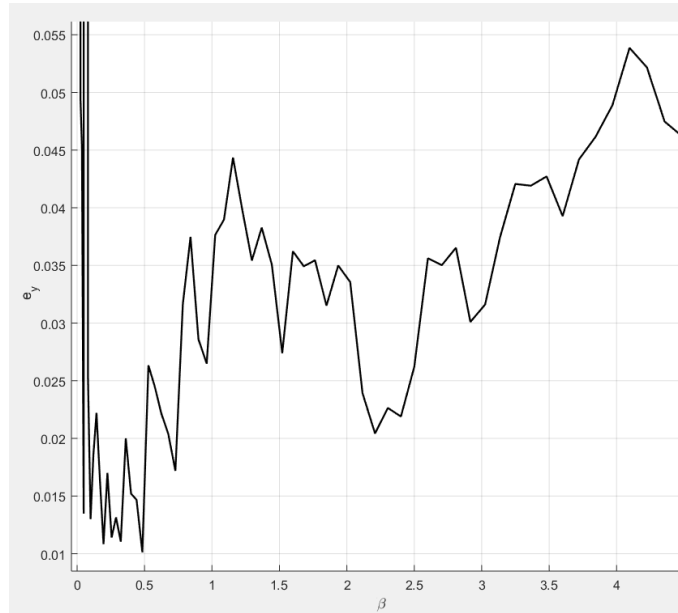
Rysunek 32: Sterowanie modelu (226) po trajektorii referencyjnej bez korekcji oraz z korekcją dla optymalnych wartości wsp.  $\beta$  i  $\tau_{cr}$ .

#### 4.7.3 Model z nieliniowością na wejściu i wyjściu

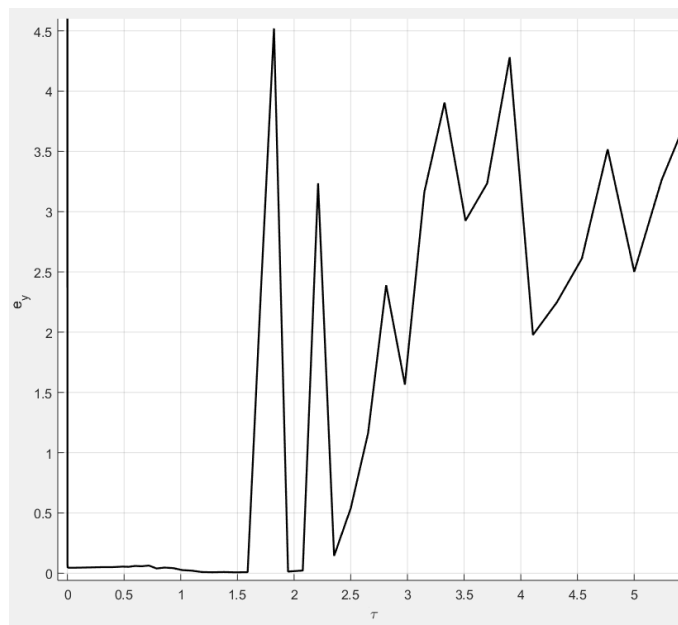
Dany jest system dynamiczny opisany równaniami stanu (220), (221), (222) w postaci kanonicznej sterowalnej z nieliniowością na wejściu (227) i wyjściu (228), (Rys. 20).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(5\sin(5u(t))), \quad (227)$$

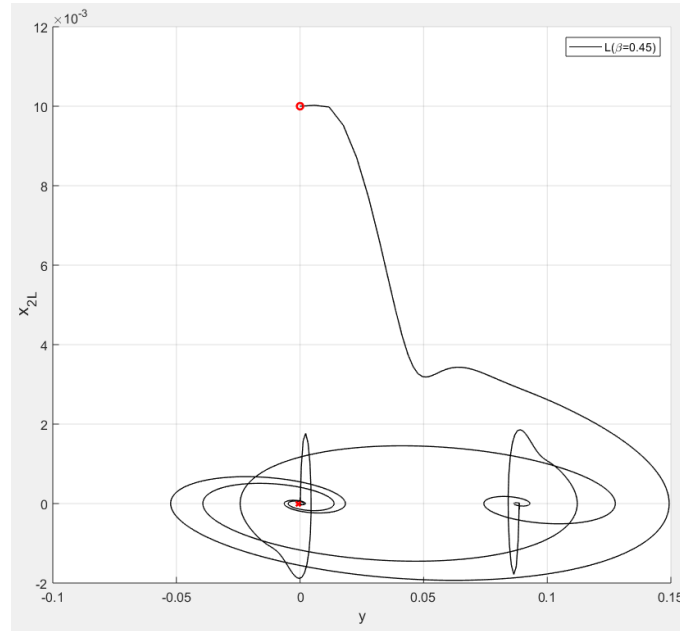
$$y(t) = 5\sin(3Cx(t)) \quad (228)$$



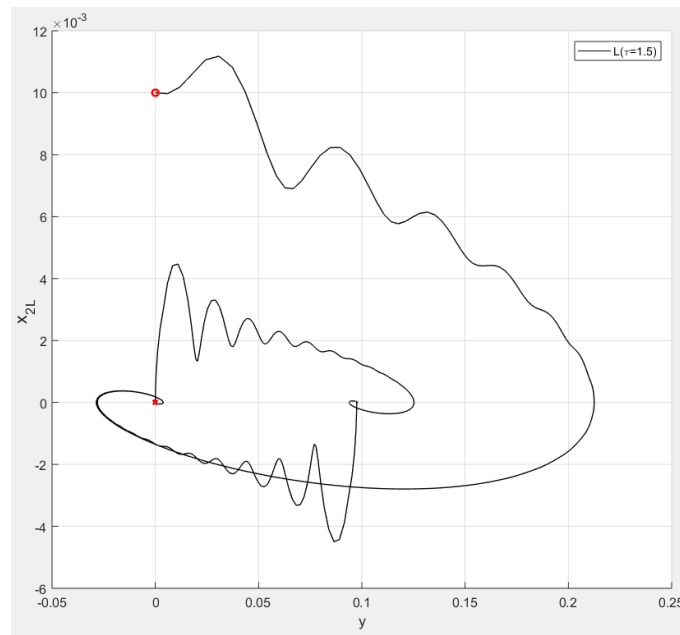
Rysunek 33: Zależność błędu wyjścia układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem HG (198) w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .



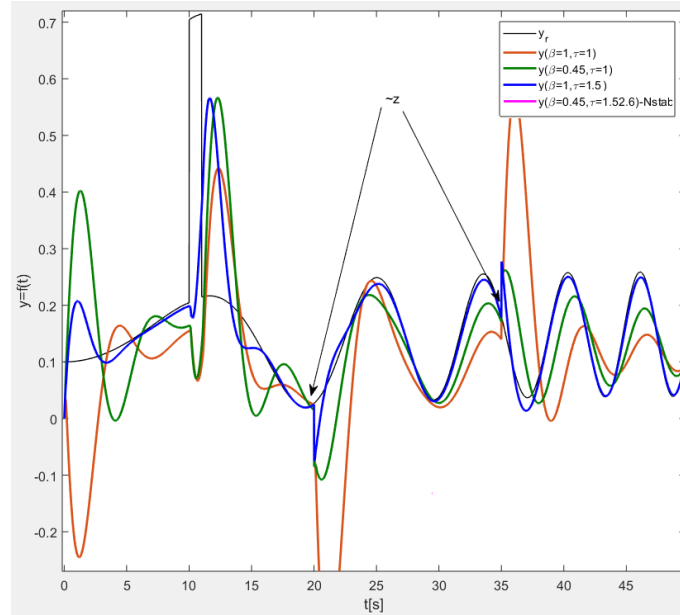
Rysunek 34: Zależność błędu wyjścia układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem HG (198) w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$ .



Rysunek 35: Trajektorie stanu w zadaniu stabilizacji modelu (228) w układzie regulacji (Rys. 17) dla optymalnej wartości współczynnika  $\beta = 0.45$ .



Rysunek 36: Trajektorie stanu w zadaniu stabilizacji modelu (228) w układzie regulacji (Rys. 17) dla optymalnej wartości współczynnika  $\tau_{cr} = 1.5$ .



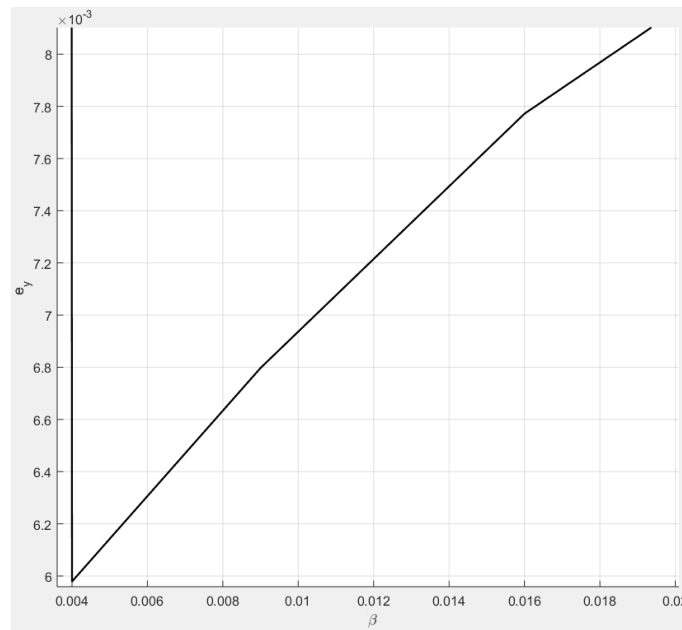
Rysunek 37: Sterowanie modelu (228) po trajektorii referencyjnej bez korekcji oraz z korekcją dla optymalnych wartości wsp.  $\beta$  i  $\tau_{cr}$ .

#### 4.7.4 Podsumowanie eksperymentów na modelach Hammersteina-Wienera

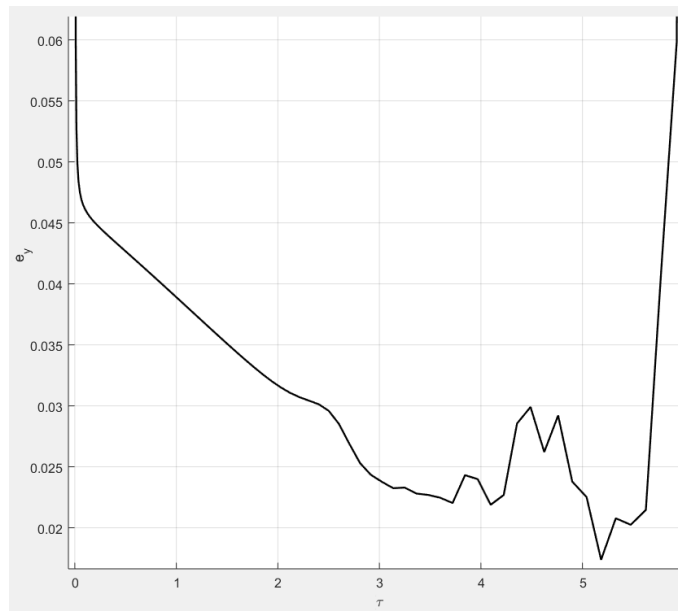
W eksperymentach numerycznych przeprowadzonych na modelach Hammersteina-Wienera zweryfikowano algorytm linearyzacji (Rozdział 4.2.7) i optymalizacji obserwatora linearyzującego o wysokim wzmocnieniu. Potwierdzono właściwości korygujące obserwatora linearyzującego o wysokim wzmocnieniu dla systemu nieliniowego, którego dowód wg [Khalil (2015)] zamieszczono w rozdziale 4.5, potwierdzono w rozdziale 4.6 oraz zweryfikowano eksperymentalnie w rozdziale 4.7. Wykazano brak własności korygujących optymalnego obserwatora liniowego w sterowaniu LQR (Rys. 17) dla współczynników korekcyjnych  $\beta = 1$ ,  $\tau_{cr} = 1$ . Na podstawie dyskusji przeprowadzonej w rozdziałach 4.5 oraz 4.6 i eksperymentów numerycznych (Rozdział 4.7) można sformułować tezę, że problem i kierunek zaproponowanego rozwiązania przez [Khalil (2015)] jest słuszny, jednak nie wyczerpuje całości zagadnienia, co wykazano w rozdziale 4.6 i potwierdzono eksperymentalnie w rozdziale 4.7, wprowadzając przeszacowane stałe czasowe estymatora linearyzującego, które zmieniają wzmocnienie obserwatora oraz regulatora LQR. Rozwiązanie (Rozdział 4.7) dla pewnych klas systemów nieliniowych i silnie nieliniowych daje lepsze wskaźniki jakości od postulatu uwzględnienia niepewności modelu do przeszacowania wzmocnienia obserwatora zaproponowanego w [Khalil (2015)]. Podejście zaproponowane w pracy jest uogólnione na szerszą klasę systemów nieliniowych. Z eksperymentów numerycznych przeprowadzonych na modelach Hammersteina-Wienera wynika, że deterministyczną zmienną decyzyjną w zadaniu optymalizacji, która decyduje o stabilności układu regulacji (Rys. 17) i wartości wskaźnika jakości (219) jest współczynnik korekcji  $\beta$  (198), (199). Z powyższych względów dalsze badania będą przeprowadzone z nadaniem priorytetów kolejności optymalizacji. Współczynnik korekcji  $\beta$  będzie pierwszą zmienną decyzyjną optymalizacji obserwatora HG, dla optymalnej wartości  $\beta$  wykonana zostanie optymalizacja współczynnika korekcji  $\tau_{cr}$ . Optymalizację współczynników korekcyjnych, które są funkcjami niewypukłymi wykonano numerycznie ze względu na utykanie algorytmów gradientowych. Zastosowano algorytm rekurencyjnego poszukiwania minimum funkcji celu ze zmianą kroku i zawężaniem przedziału wokół najlepszych wartości wskaźnika jakości.

#### 4.8 Sterowanie modelem Hammersteina-Wienera z linearyzacją ARMAX

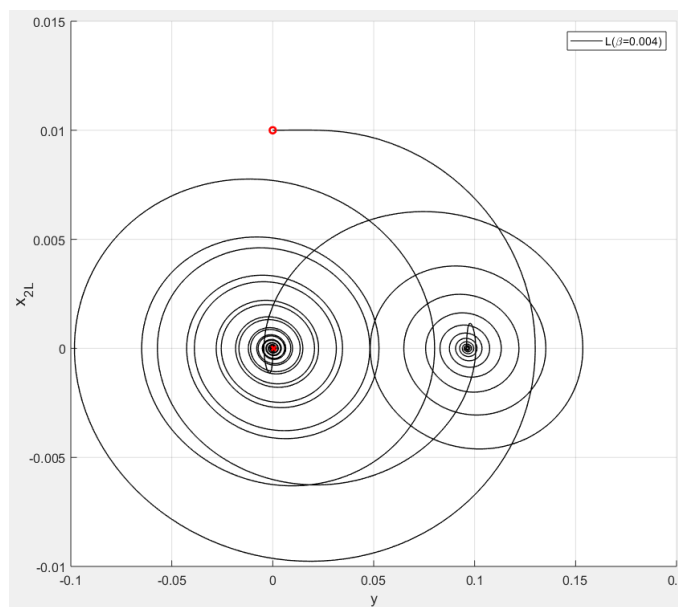
Badanie systemu Hammersteina-Wienera (Rozdział 4.7.3) powtórzono, zakładając, że nieznaną jest struktura modelu, z której metodą opisaną w rozdziale (Rozdział 4.2.7) wyróżniono model liniowy, niepewność modelu skorygowano poprzez zastosowanie obserwatora o wysokim wzmocnieniu (199) i regulatora (216). Dany jest system dynamiczny opisany równaniami stanu (220), (221), (222), w postaci kanonicznej sterowalnej z nieliniowością na wejściu (227) i wyjściu (228) (Rys. 20), z warunkiem początkowym  $x_2(0) = 0.01$ . Dla sygnału testującego jak na (Rys. 26) wartości dyskretne wejścia i wyjścia z przedziału linearyzacji wprowadzono do algorytmu (Rozdział 4.2.7), który wg [Ton (1971)], [Browder (1964)], [Lions (1965)] pozwolił na wyróżnienie struktur liniowych. Przyjęto założenie, że do obliczenia optymalnego estymatora liniowego wykorzystane zostaną dane z przedziału  $t \in [90 \dots 100]$  dla sygnału testującego (Rys. 37). Obliczono optymalny estymator liniowy (Rozdział 4.2.7). Niepewność modelu w układzie regulacji (Rys. 17) skorygowano poprzez zastosowanie obserwatora linearyzującego o wysokim wzmocnieniu HG (199).



Rysunek 38: Zależność błędów wyjściowych układu regulacji (18) z obserwatorem HG w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .

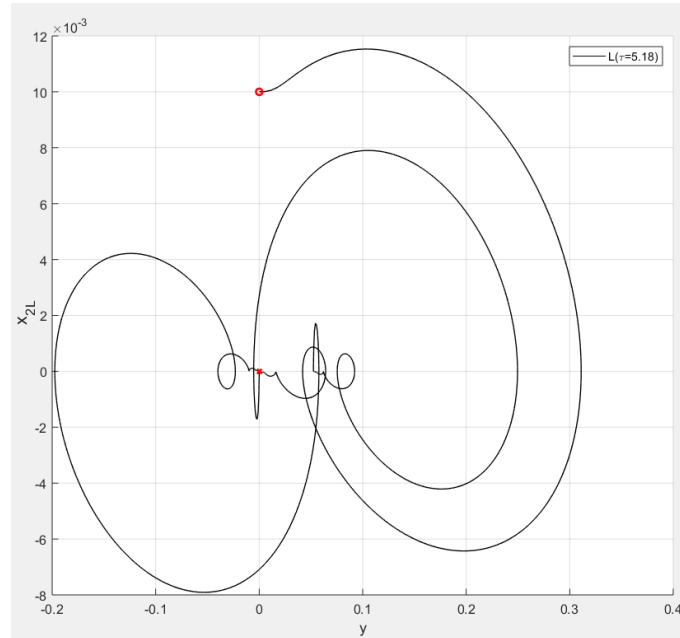
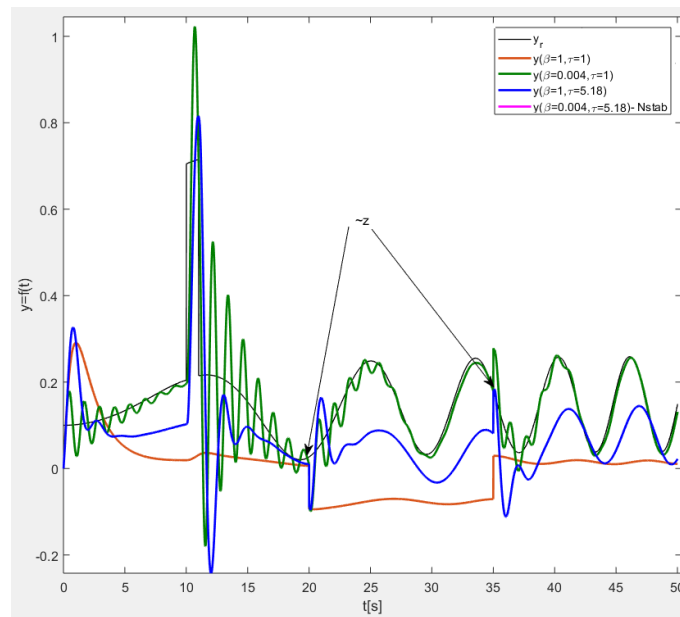


Rysunek 39: Zależność błędu wyjścia układu regulacji (18) z obserwatorem HG w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$ .



Rysunek 40: Stabilizacja modelu dla optymalnej wartości współczynnika  $\beta = 0.004$ .



Rysunek 41: Stabilizacja modelu dla optymalnej wartości współczynnika  $\tau_{cr} = 5.18$ .Rysunek 42: Sterowanie modelu (227), (228) po trajektorii referencyjnej z obserwatorem linearyzującym (199), bez korekcji oraz z korekcją dla optymalnych wartości wsp.  $\beta$  i  $\tau_{cr}$ .

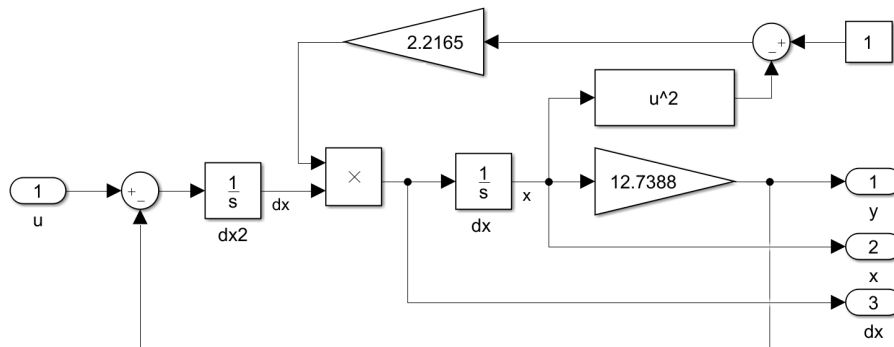
Porównując wskaźnik jakości (219), (Rys. 33), (Rys. 38), (Rys. 34), (Rys. 39) oraz trajektorie stanu w zadaniu stabilizacji (Rys. 35), (Rys. 40) eksperymentów przeprowadzonych w rozdziałach 4.7.3, 4.8 nasuwa się wniosek, że w układzie sterowania (Rys. 18) z regulatorem LQR i obserwatorem o wysokim wzmocnieniu znacząco lepsze wskaźniki jakości  $e_y$ ;  $\frac{0,015}{0,006_{ARMAX}}(\beta)$ ,  $\frac{0,1}{0,016_{ARMAX}}(\tau_{cr})$ , uzyskuje się dla obserwatora linearyzującego o wysokim wzmocnieniu i regulatora LQR obliczonych dla modelu linearyzowanego metodą ARMAX (Rozdział 4.2.7).

#### 4.9 Sterowanie nieliniowym systemem oscylacyjnym

Dany jest nieliniowy system dynamiczny, oscylator Van der Pola opisany równaniem

$$\ddot{x} + a_1(1 - x^2)\dot{x} + a_2x = bu, \quad (229)$$

z parametrami wg [Zak (2003)] (Driankov, Hellendoorn, and Reinfrank [67, pp.266-272]),  $a_1 = 2.2165$ ,  $a_2 = b = 12.7388$ , sterowanie należy do przedziału  $|u| \leq 15$ . System dynamiczny (229) zamodelowano w Matlab/Simulink (Rys. 43).



Rysunek 43: Model systemu dynamicznego (229) w Matlab/Simulink.

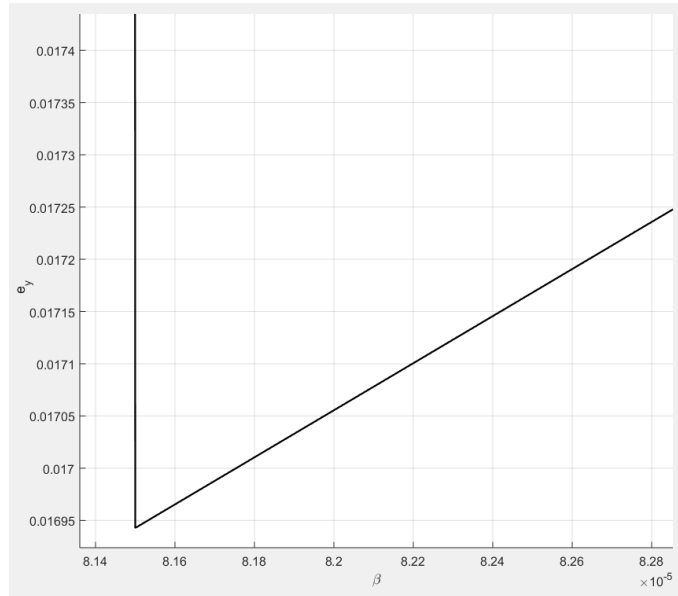
Z równania (229) można wyodrębnić model liniowy

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = bu, \quad (230)$$

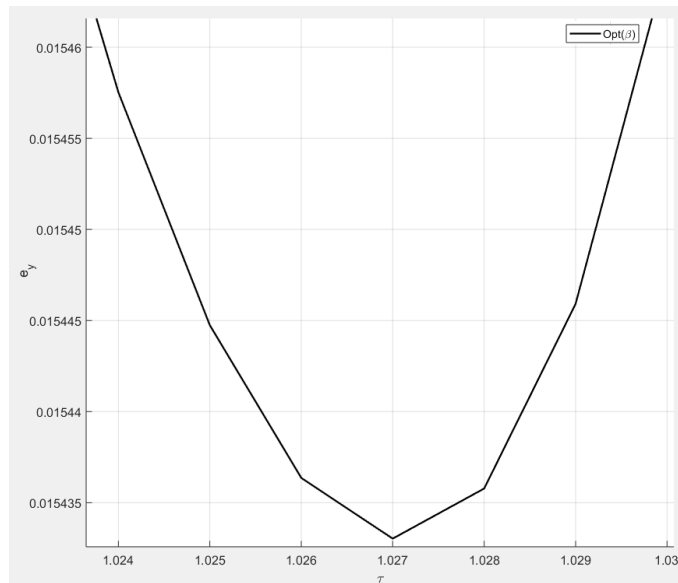
w zapisie operatorowym otrzymujemy

$$G(s) = \frac{12.7388}{s^2 + 2.2165s + 12.7388}. \quad (231)$$

Po przekształceniu równania (231) do postaci kanonicznej sterowalnej w przestrzeni stanów obliczono obserwator (198) i regulator LQR (18). Do obserwatora wprowadzono sygnał wejściowy i wyjściowy z modelu nieliniowego (229) w układzie sterowania (Rys. 17). Wykorzystując algorytm (Rozdział 4.2.7) oraz doświadczenia na modelach Hammersteina-Wienera (Rozdział 4.7), wykonano korekcję wzmocnienia obserwatora HG (198) wykorzystując optymalizację numeryczną dla zmiennych decyzyjnych  $\beta$ ,  $\tau_{cr}$ . Obliczono wartość optymalnego współczynnika  $\beta$ , dla którego wykonano optymalizację numeryczną współczynnika korekcji  $\tau_{cr}$ . Wyniki optymalizacji numerycznej przedstawiono na wykresach (Rys. 44), (Rys. 45).

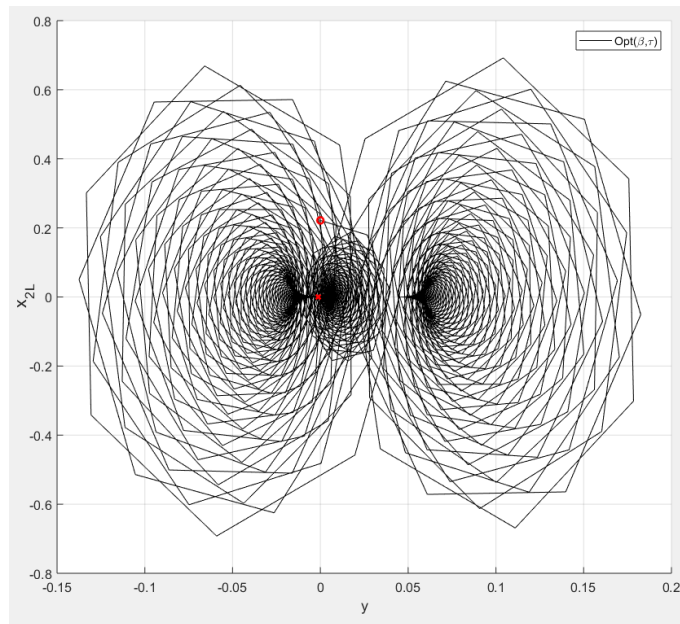


Rysunek 44: Zależność błęd wyjścia układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem HG w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .

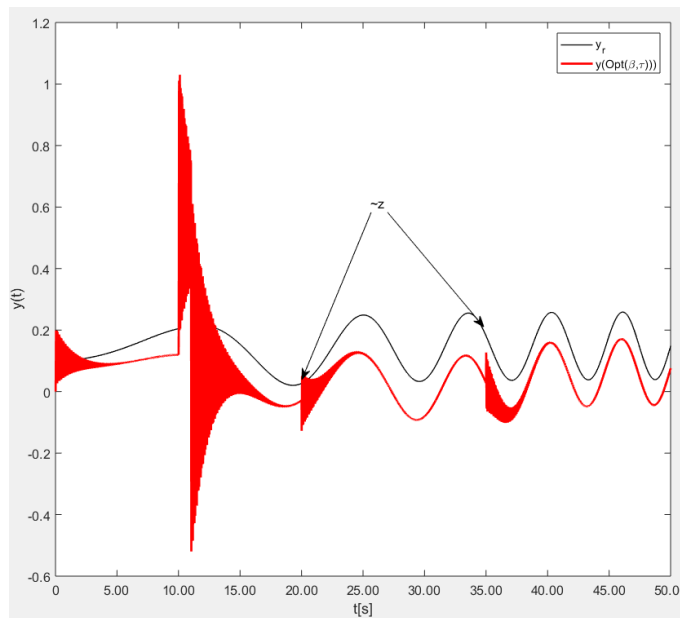


Rysunek 45: Zależność błęd wyjścia układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$  dla optymalnej wartości  $\beta$ .

Dla optymalnego obserwatora HG w układzie sterowania (Rys. 17) metodą topologiczną płaszczyzny fazowej przeprowadzono badanie stabilności systemu dynamicznego (229). Wykresy stabilizacji systemu (229) w różnych stanach pracy przedstawiono na płaszczyźnie fazowej (Rys. 46).

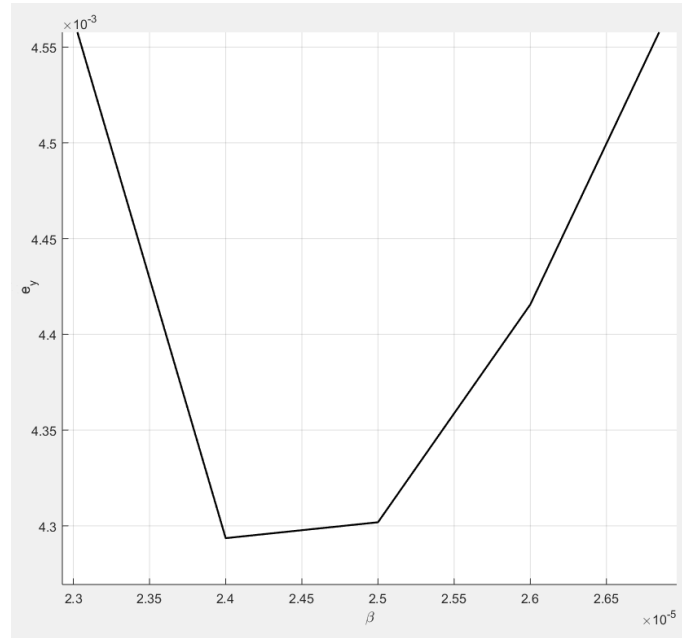


Rysunek 46: Trajektorie stanu systemu nieliniowego (229) dla sterowania w zadaniu stabilizacji w różnych punktach pracy.

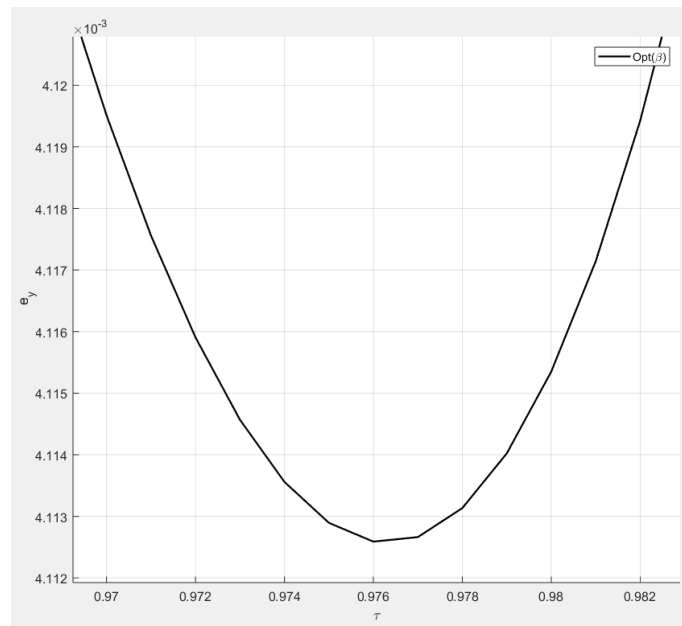


Rysunek 47: Sterowanie modelu (229) po trajektorii referencyjnej w układzie regulacji (Rys. 18) z obserwatorem HG (198) i korekcją wartości współczynników  $\beta_{opt}$  i  $\tau_{cr(opt)}$ .

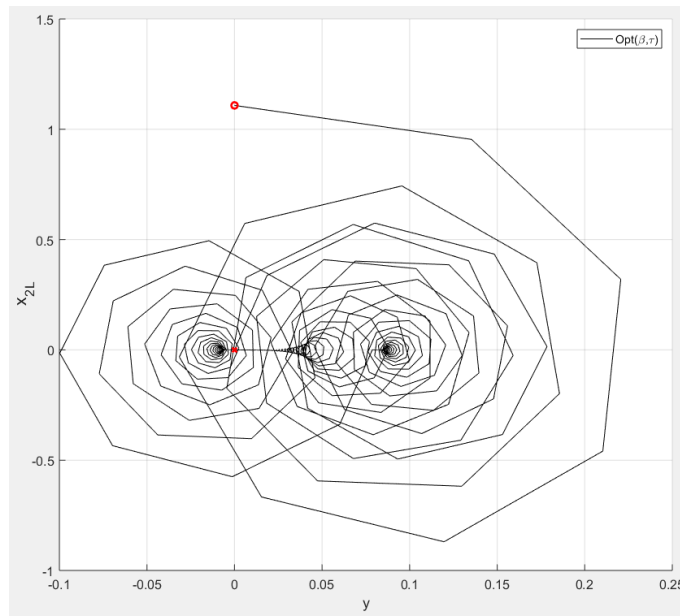
Eksperyment powtórzono przy założeniu że struktura systemu nieliniowego (229) nie jest znana, znany jest sygnał testujący i odpowiedź. Dla powyższych założeń powtórzono postępowanie jak w rozdziale 4.8. Sygnał testujący został wykorzystany jako sygnał referencyjny w zadaniu sterowania trajektorii referencyjnej. Wyniki eksperymentu zamieszczono na rysunkach (Rys. 47), (Rys. 48), (Rys. 49).



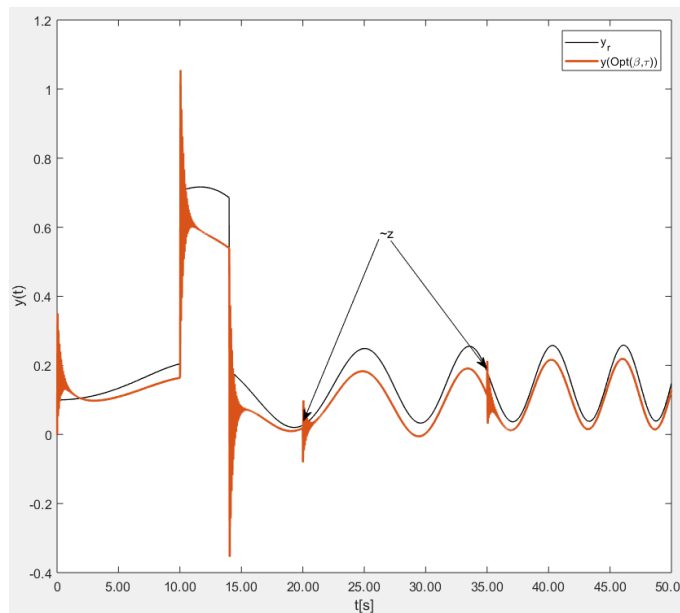
Rysunek 48: Zależność błędu wyjścia układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem linearyzującym HG(ARMAX) w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .



Rysunek 49: Zależność błędu wyjścia układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem linearyzującym HG(ARMAX) w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$  dla optymalnej wartości  $\beta$ .



Rysunek 50: Trajektorie stanu systemu nieliniowego (229) w zadaniu stabilizacji LQR dla różnych punktów pracy z linearyzacją (Rozdział 4.2.7).



Rysunek 51: Sterowanie systemu nieliniowego (229) po trajektorii referencyjnej z obserwatorem linearyzującym HG (199), dla optymalnych wartości współczynników korekcji  $\beta$  i  $\tau_{cr}$ .

Zastosowanie linearyzacji (Rozdział 4.2.7) oraz obserwatora (199) o wysokim wzmocnieniu dla modelu oscylatora nieliniowego (229) pozwoliło uzyskać znacząco lepszy wskaźnik jakości (234), (219) w zadaniu sterowania po trajektorii referencyjnej (Rys. 47), (Rys. 51) w relacji do układu regulacji zbudowanego w oparciu o model liniowy (230) wyodrębniony z modelu nieliniowego (229) oraz znacząco lepszą zbieżność w zadaniu stabilizacji (Rys. 46), (Rys. 50).

$$J_{OscG(s)} = 0.01543 \quad (232)$$

$$J_{OscARMAX} = 0.004112 \quad (233)$$

$$\frac{J_{OscG(s)}}{J_{OscARMAX}} = 3,7524 \quad (234)$$

#### 4.10 Sterowanie nieliniowym modelem niestabilnym z linearyzacją ARMAX

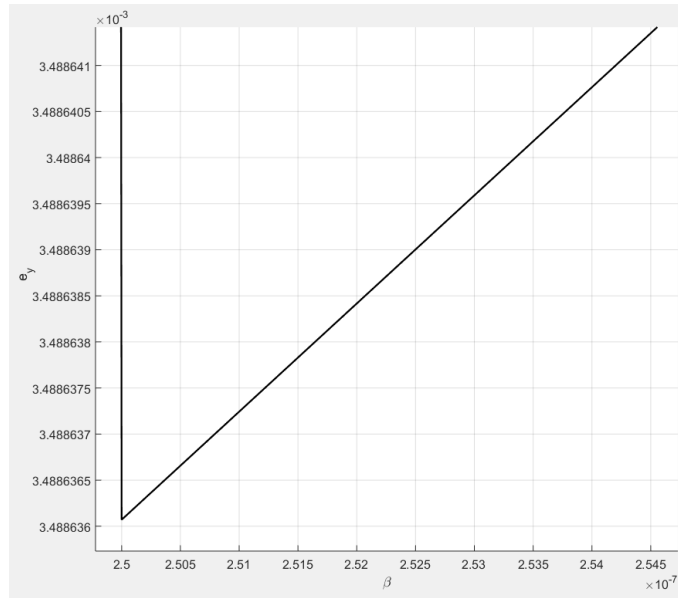
Rozważmy nieliniowy niestabilny system dynamiczny opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = x^3(t), \quad (235)$$

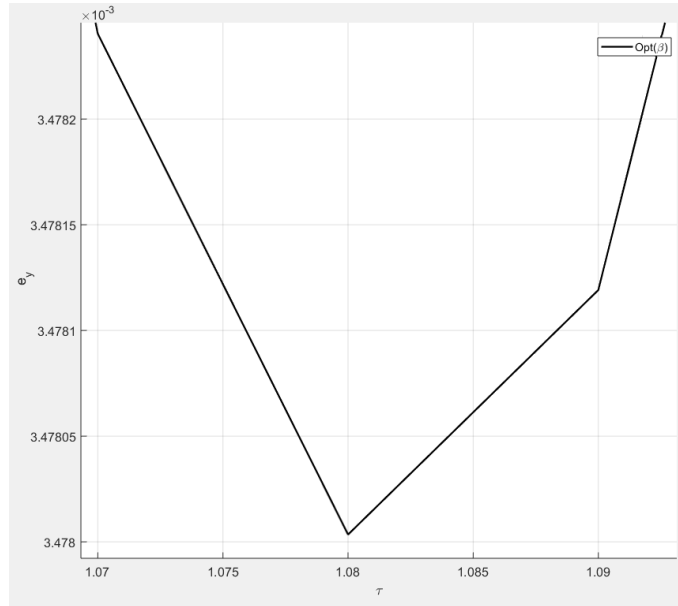
po wprowadzeniu sterowania otrzymujemy

$$\dot{x}(t) - x^3(t) = bu(t). \quad (236)$$

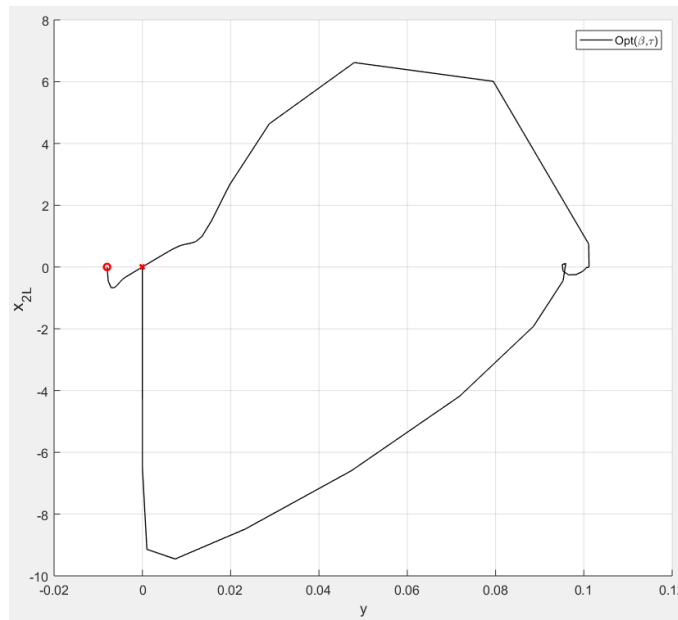
System (235) jest globalnie niestabilny poza punktem równowagi  $x(0)$ , który w tym przypadku jest źródłem trajektorii systemu. Dla powyższych założeń powtórzono postępowanie (Rozdział 4.8). Wyniki zamieszczono na rysunkach (Rys. 52), (Rys. 52), (Rys. 54), (Rys. 55) .



Rysunek 52: Zależność błędu wyjścia układu regulacji LQR z obserwatorem w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .

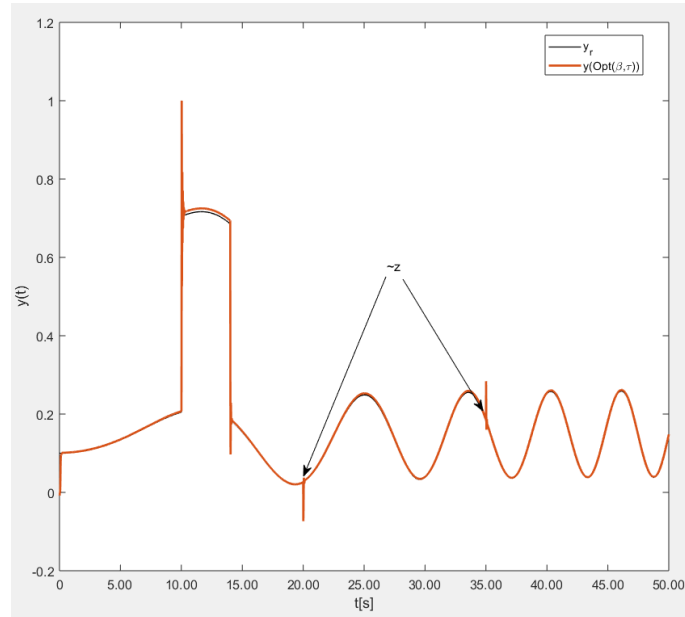


Rysunek 53: Zależność błędu wyjścia układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem linearyzującym (199) HG w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$  dla optymalnej wartości  $\beta$ .



Rysunek 54: Trajektorie stanu systemu nieliniowego (236) dla sterowania w zadaniu stabilizacji.





Rysunek 55: Sterowanie systemu nieliniowego (236) po trajektorii referencyjnej z linearyzacją ARMAX.

Z eksperymentów przeprowadzonych na modelu (236) wynika, że zaproponowany algorytm linearyzacji pozwala na linearyzację systemów niestabilnych. Zastosowanie omówionych algorytmów obliczenia obserwatora HG i regulatora LQR pozwala na stabilizację systemów niestabilnych w układzie sterowania (Rys. 17), (Rys. 18).

#### 4.11 Sterowanie systemem nieliniowym z histerezą, linearyzacją ARMAX przy ograniczeniu na sterowanie

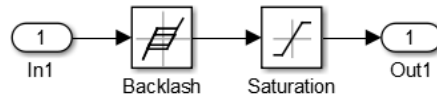
Dany jest system dynamiczny opisany równaniem nieliniowym (237),

$$\ddot{x}(t) + 0.01\dot{x}(t) + x(t) + x^2(t) = u(t), \quad (237)$$

sterowany sygnałem o ograniczonej wartości z histerezą

$$u \in \mathbb{R}[-2.95 \dots -hyst \ 0 \ hyst \dots 2.95]. \quad (238)$$

Sygnał sterujący zamodelowano w Matalab/Simulik jak na (Rys. 56)



Rysunek 56: Model sygnału sterującego z histerezą (przełącznik).

Linearyzację systemu przeprowadzono algorytmem (Rozdział 4.2.7) na przedziale

$$k \in [87 \dots 1100], \quad (239)$$

dla ograniczeń

$$u \in (-1 \dots 1), \quad (240)$$

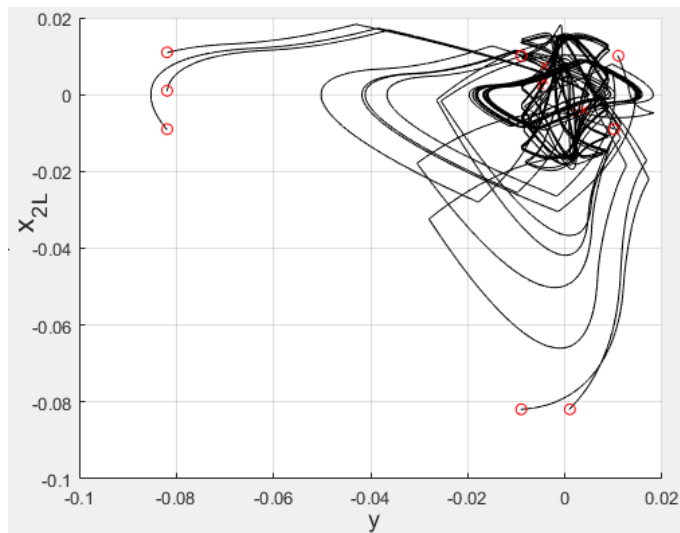
z krokiem dyskretyzacji  $\Delta t = 0.01[s]$ .

Do celów linearyzacji wykorzystano funkcję testującą  $u(k\Delta t) = \sin(220k\Delta t)$ , dla odpowiednich wartości dyskretnych sygnału testującego na wejściu zarejestrowano wartości sygnału na wyjściu. Dane uzyskane z eksperymentu wykorzystano w algorytmie linearyzacji (Rozdział 4.2.7), (136). Po konwersji do dziedziny czasu ciągłego i przestrzeni stanów otrzymano model w formie kanonicznej sterowalnej

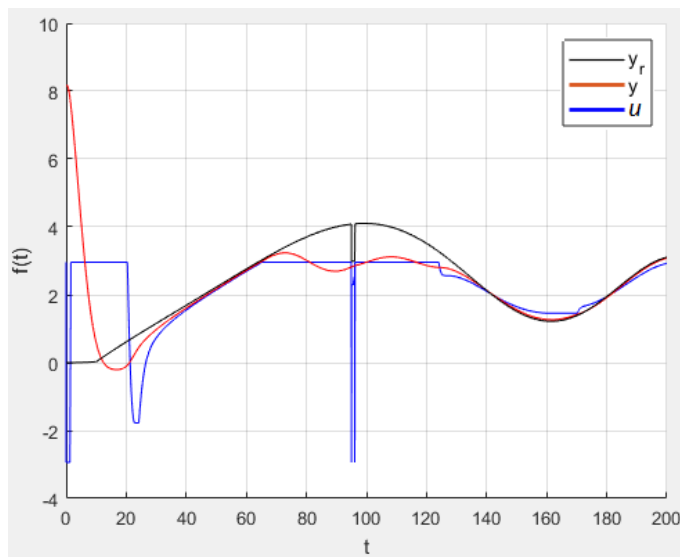
$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} -7.8304 & 1.0547 & -0.2086 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= [ 0.000011 \quad 0.0058 \quad 0.0536 ]. \end{aligned} \quad (241)$$

Linearyzujące sprzężenie zwrotne zrealizowano poprzez obserwator HG (199), dla modelu skorygowanego (4.5) wyliczono wzmocnienie regulatora LQR (242)

$$K = [ 0.4681 \quad 3.7752 \quad 0.3669 ]. \quad (242)$$



Rysunek 57: Trajektorie stanu systemu dla sterowania w zadaniu stabilizacji.

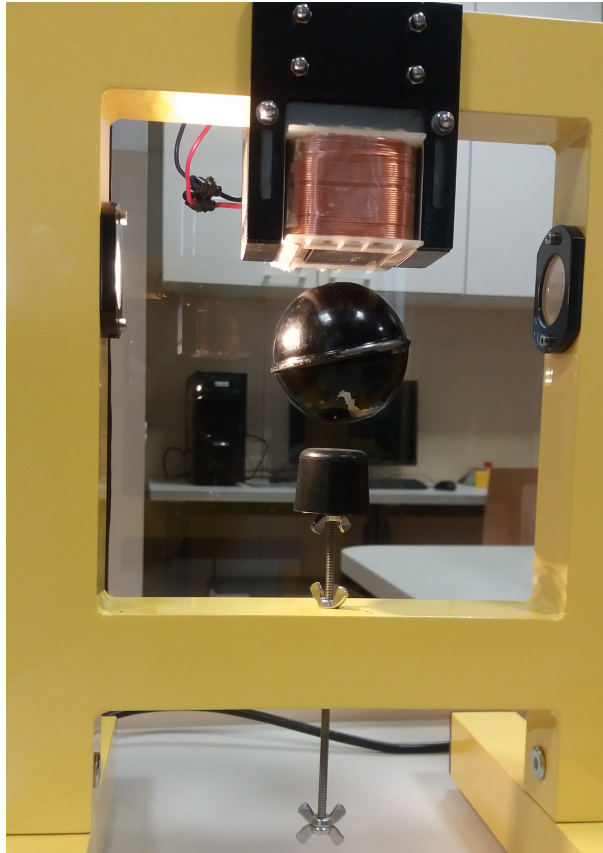


Rysunek 58: Sterowanie po trajektorii referencyjnej.

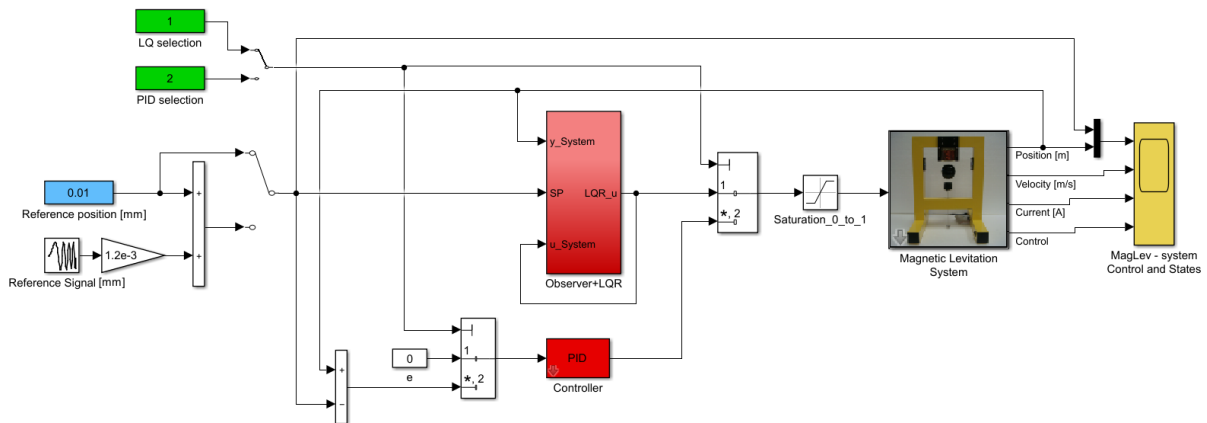
Proponowane algorytmy: linearyzacji, obliczenia obserwatora HG i regulatora LQR zapewniły stabilizację systemu (237), (238) (Rys. 57) oraz sterowanie po trajektorii referencyjnej (Rys. 58) z akceptowalnym poziomem błędu.

## 4.12 Sterowanie laboratoryjnym modelem lewitacji magnetycznej z linearyzacją ARMAX

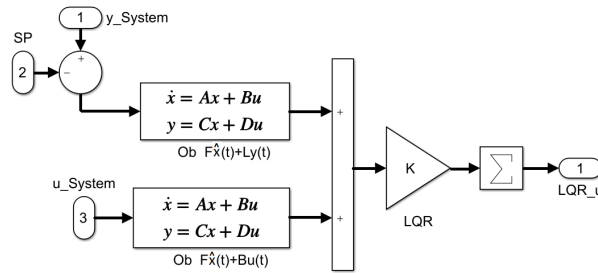
Proponowany algorytm linearyzacji oraz sterowania LQR z obserwatorem o wysokim wzmocnieniu zweryfikowano eksperymentalnie na stanowisku laboratoryjnym lewitacji magnetycznej.



Rysunek 59: Lewitacja magnetyczna, stanowisko laboratoryjne.



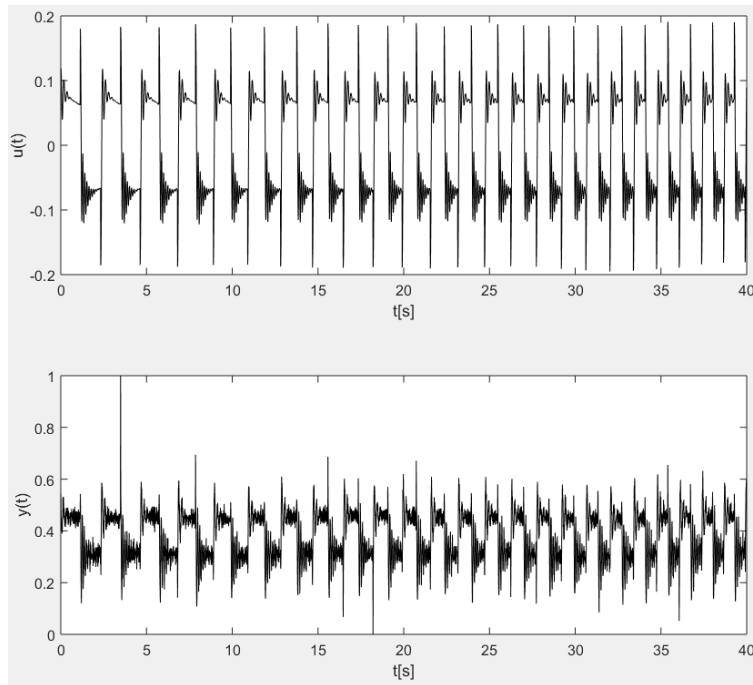
Rysunek 60: Model sterowania lewitacji magnetycznej w Matlab/Simulink.



Rysunek 61: Podsystem w Matlab/Simulink modelu sterowania lewitacji magnetycznej: obserwator i regulator LQR.

Aplikacja sterująca modelem lewitacji magnetycznej pracuje w systemie Matlab/Simulink R2015a Realtime na platformie systemu operacyjnego Windows 7, komunikując się z elektronicznym modułem przetwornika I/O (wejście/wyjście). Ograniczenia techniczne monitoringu i akwizycji wartości pomiarowych pozwalają na archiwizację danych z krokiem dyskretyzacji 0.01[s]. Dla laboratoryjnego systemu lewitacji magnetycznej (Rys. 59) podjęto próbę identyfikacji modelu matematycznego w pełnym zakresie pracy tj. silnie nieliniowego systemu niestabilnego, generując wartości sterowania  $u(t) = 0.001u_{max}t$  na przedziale  $t = [t_0...t_n]$  z przyrostem wartości sterującej  $0.01u_{max}/1s$ . Po osiągnięciu gęstości sumienia magnetycznego równoważącego energię potencjalną kulki nastąpiła zmiana położenia. Zarejestrowano wartości sterowania i położenia kulki. Ograniczenia techniczne dyskretyzacji i archiwizacji danych pozwoliły na zarejestrowanie od kilku do kilkunastu wartości zależnych  $y(t) = f(u(t))$ . Mała ilość uzyskanych danych zależnych nie pozwoliła na wykonanie identyfikacji w szerszym otoczeniu z akceptowalnym poziomem błędu. Ze względu na ograniczenia techniczne dyskretyzacji danych eksperyment identyfikacji modelu lewitacji magnetycznej wykonano metodą odchyłkową. Po ustabilizowaniu systemu regulatorem PID na wejście referencyjne regulatora podano sygnał testujący (243), (Rys. 62), wartości sygnału testującego i położenie kulki zostały zarchiwizowane. Zarchiwizowane wartości wykorzystano do identyfikacji przy użyciu algorytmu opisanego w publikacji [Latocha (2018a)].

$$y_r(t) = 0,0012sgn(\sin(0.016t)). \quad (243)$$

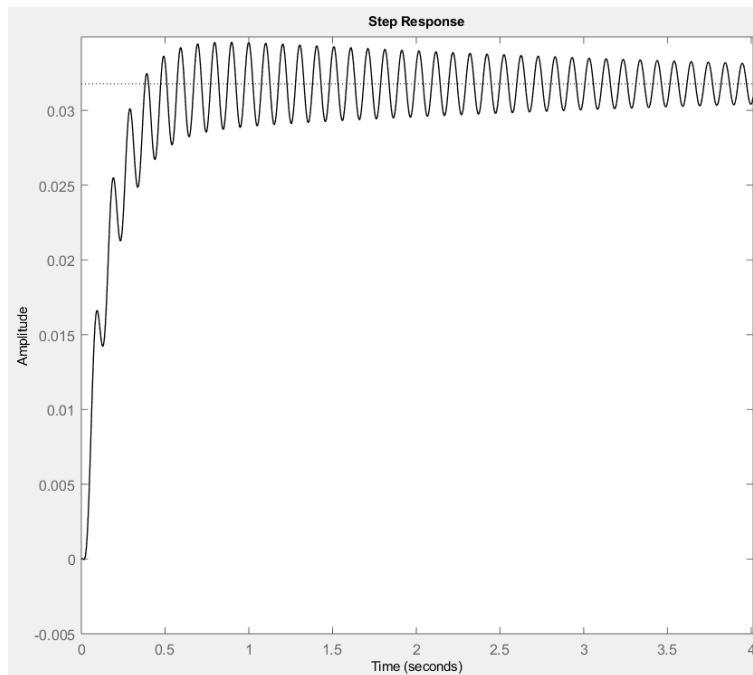


Rysunek 62: Identyfikacja modelu lewitacji magnetycznej, sygnał testujący i odpowiedź modelu.

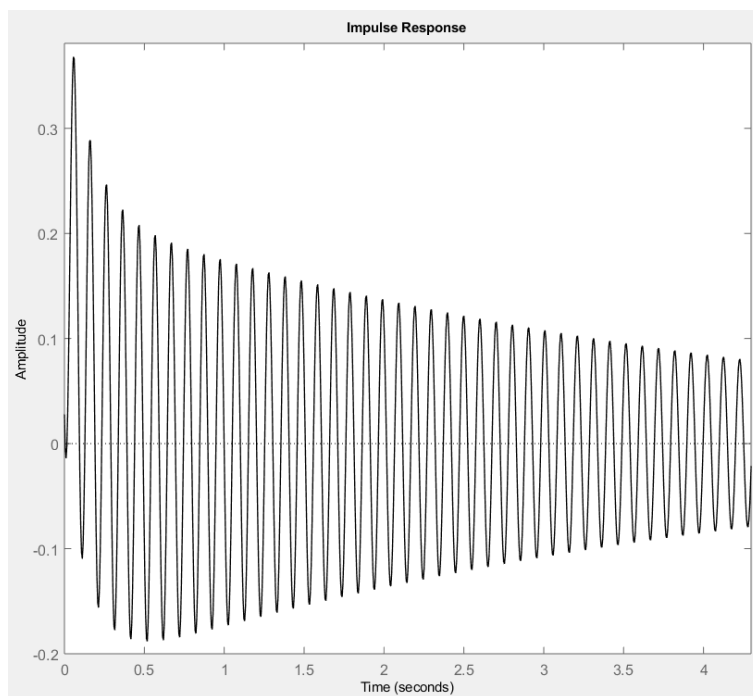
Zidentyfikowany model dyskretny przekonwertowano do dziedziny czasu ciągłego z wykorzystaniem algorytmu ekstrapolatora zerowego rzędu ZOH, otrzymano model (244).

$$\hat{G}_{lewitacja}(s) = \frac{-2263s^2 - 3.252e04s - 7.596e04}{s^3 + 187.5s^2 + 4.456e04s + 1.788e06}. \quad (244)$$

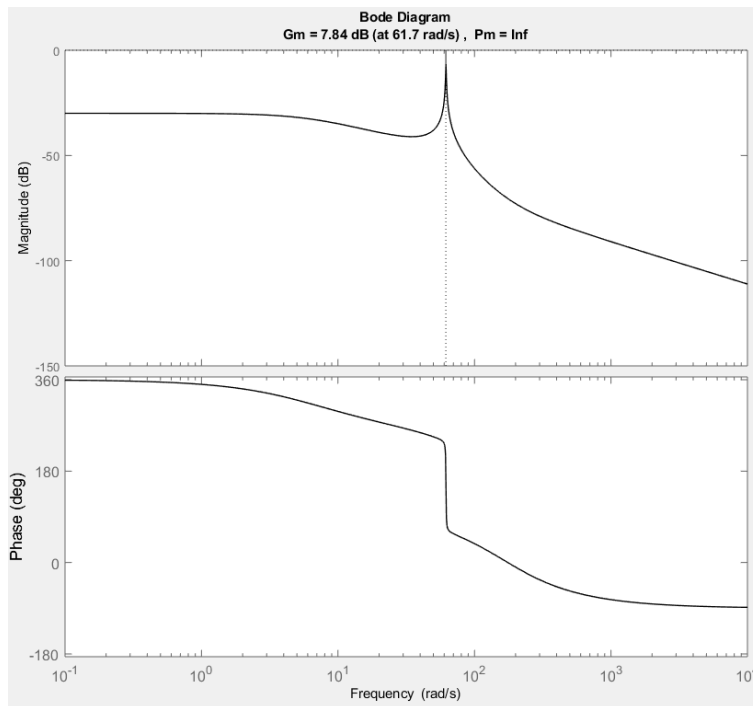
Dla zidentyfikowanego modelu lewitacji magnetycznej (244) przeprowadzono badanie stabilności i własności dynamicznych (Rys. 63), (Rys. 64), (Rys. 65), (Rys. 66).



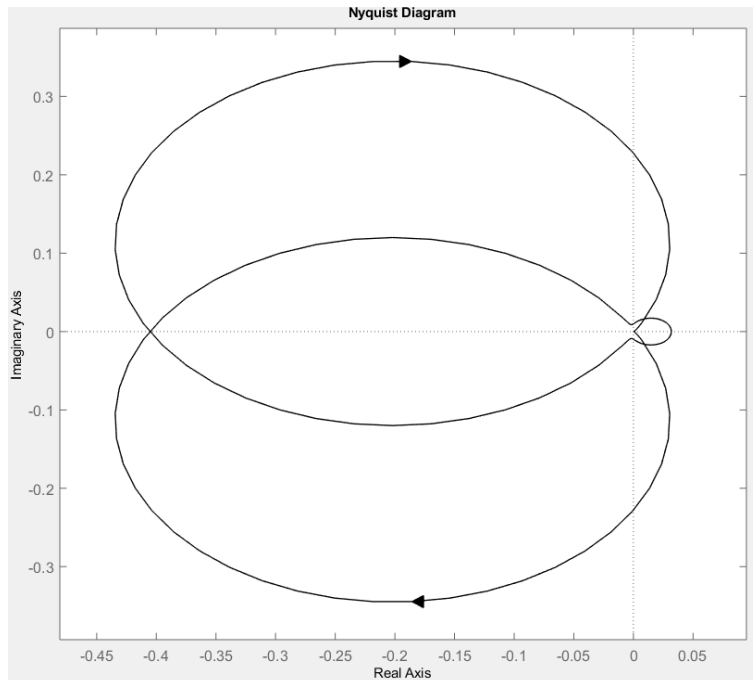
Rysunek 63: Lewitacja odpowiedź modelu (244) na skok jednostkowy.



Rysunek 64: Lewitacja odpowiedź modelu (244) na impuls.



Rysunek 65: Wykres Bodego dla modelu (244).



Rysunek 66: Wykres Nyquista dla modelu (244).

W celu obliczenia obserwatora linearyzującego i regulatora LQR model otrzymany z identyfikacji (244) przekonwertowano do postaci kanonicznej sterowalnej w przestrzeni stanów. Po zastosowaniu korekcji (199) dla optymalnych wartości współczynników korygujących  $\beta = 36.1e - 5$  oraz  $\tau_{cr} = 0.5$



obliczono macierze modelu zlinearyzowanego oraz macierz regulatora LQR (250). Dla arbitralnie przyjętych wartości własnych obserwatora  $\lambda = -500$ , wykorzystując algorytm optymalizacji Ackermanna obliczono macierze obserwatora HG (248), (249),

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -28.268 & -61200 & -1611520 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (245)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (246)$$

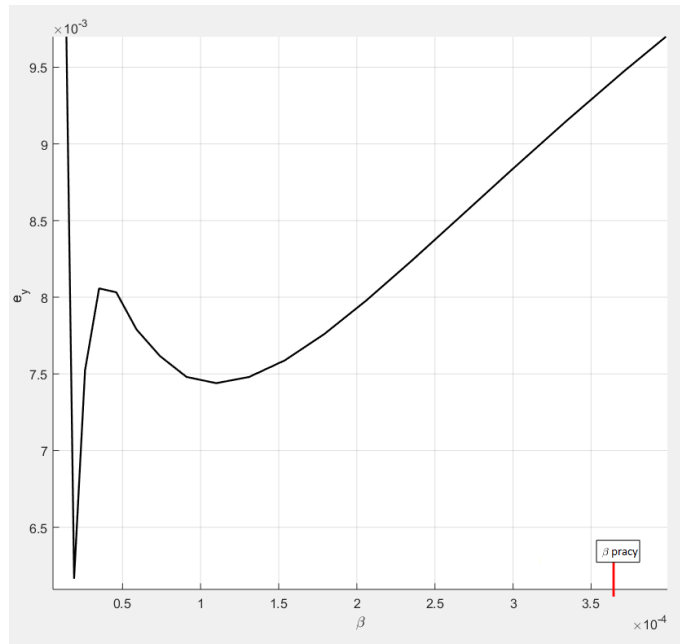
$$\hat{C} = [ 40.2154 \quad -46439.04 \quad 18480889.6 ], \quad (247)$$

$$F = \begin{bmatrix} -12.972052362 & -78863.112245837 & 5417695.664400513 \\ 1.141949145 & -163.916858801 & 65232.385748591 \\ -0.000267896 & 1.309355280 & -123.111088838 \end{bmatrix}, \quad (248)$$

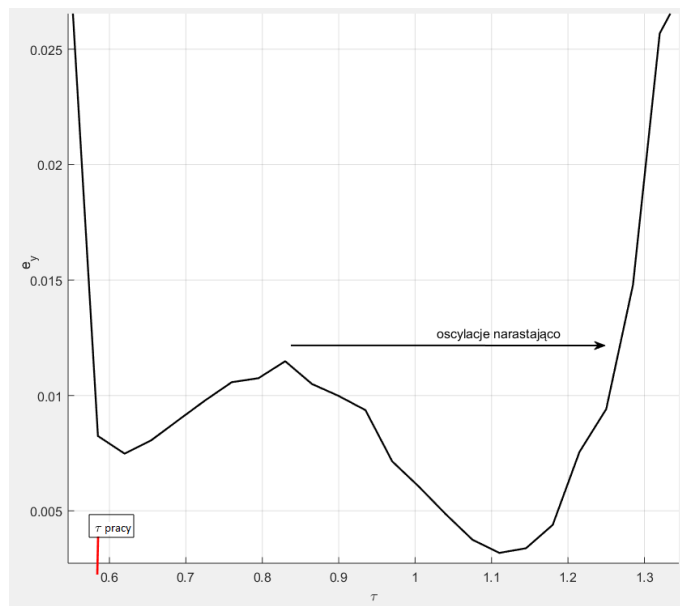
$$L = \begin{bmatrix} -380350.5034952708 \\ -3529.7210881337 \\ 6.6615347801 \end{bmatrix}. \quad (249)$$

Macierz wzmocnienia (250) regulatora LQR (19) obliczono, rozwiązując algebraiczne równanie Riccatiego (20) modelu skorygowanego (245), (246), dla macierzy współczynników wagowych  $R = 1$ ,  $Q = 1$ ,

$$K = \begin{bmatrix} 0.242858463518190 \\ 6.394613163382415 \\ 0.000000310295985 \end{bmatrix}. \quad (250)$$



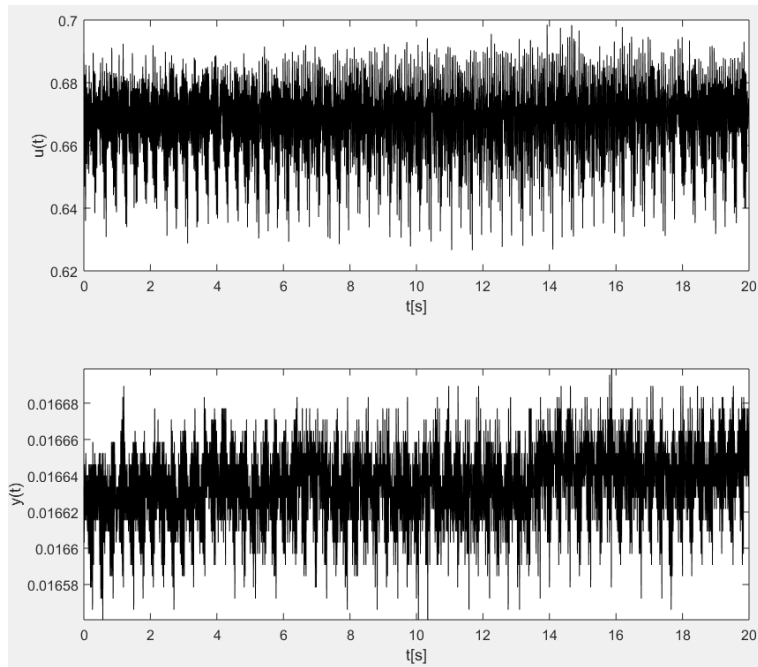
Rysunek 67: Zależność błędu wyjścia (219) modelu (244) w układzie sterowania (Rys. 17) w funkcji współczynnika korygującego  $\beta$ .



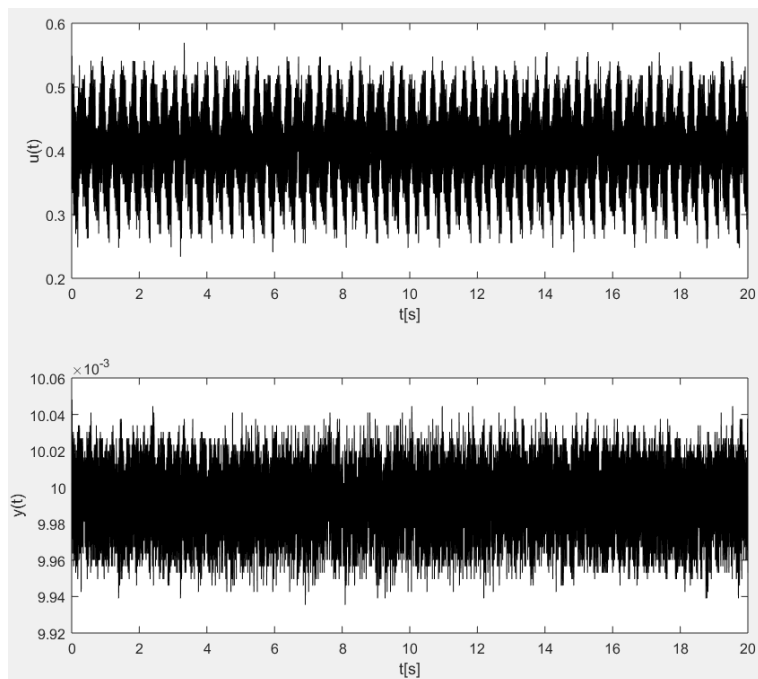
Rysunek 68: Zależność błędu wyjścia (219) układu regulacji (Rys. 17) z obserwatorem (199) w funkcji współczynnika korygującego  $\tau_{cr}$  dla optymalnej wartości  $\beta$ .

Na rysunkach (Rys. 67), (Rys. 68) przedstawiono obliczoną zależność błędu wyjścia układu regulacji w funkcji współczynników korekcji  $\beta$ ,  $\tau_{cr}$  oraz naniesiono wartości współczynników korekcji  $\beta$ ,  $\tau_{cr}$  (czerwony znacznik) dla których ustabilizowano system lewitacji magnetycznej. Przebieg sygnału sterującego i położeniach kulki modelu lewitacji magnetycznej sterowanej klasycznym regulatorem PID oraz poprzez proponowany algorytm LQR z obserwatorem ARMAX przedstawiono na

rysunkach (Rys. 70), (Rys. 69).



Rysunek 69: Stabilizacja LQR z obserwatorem linearyzującym HG w systemie lewitacji magnetycznej.



Rysunek 70: Stabilizacja PID w systemie lewitacji magnetycznej.

System (Rys. 59) z regulatorem LQR i obserwatorem linearyzującym (199) spełnił założenia

(Teza 1 1), (Teza 2 2). Jest systemem silnie nieliniowym, w którym zostały wyróżnione struktury liniowe (244), (199) powiązane zależnością funkcyjną (Rozdział 4.1). Posiada możliwości dodatkowej korekcji sterowania poprzez zmianę macierzy współczynników wagowych  $R$  i  $Q$  (216), dla których przyjęto wartości początkowe  $R = 1$  i  $Q = 1$ . System z regulatorem LQR i obserwatorem ARMAX dla wartości referencyjnej stabilizuje się w innej odległości od źródła pola magnetycznego w odniesieniu do systemu sterowanego regulatorem PID. Wymaga innej wartości energii dostarczonej do układu (251), (252) w celu zrównoważenia energii potencjalnej kulki, które jest nieliniową zależnością wielkości sterującej  $I(\vec{r})$  (252) oraz własności ferromagnetycznych elektromagnesu, materiału kulki i otoczenia. Można przypuszczać, że ma to związek ze zmianami sygnału sterującego (255), (257) (pulsacją), w przypadku systemów elektrycznych wg zależności  $f(\frac{di}{dt})$  generowane są różne formy energii. W układzie laboratoryjnym pomiar energii dostarczanej do układu lewitacji magnetycznej wykonany jest przetwornikiem analogowo-cyfrowy (ang. A/D – analog to digital). Dla sygnału sterującego prądowego o dużej wartości pulsacji i amplitudy, który nie jest funkcją trygonometryczną, pomiar obarczony jest dużą niepewnością. Potwierdzają to wyniki przeprowadzonych eksperymentów. Układ sterowany regulatorem PID wykazuje najlepsze wskaźniki stabilności i odporności na zakłócenia, ponieważ sygnał sterujący jest funkcją wyjścia którą jest położenie kulki, pomiar optyczny z minimalną niepewnością. W sterowaniu regulatorem LQR systemu lewitacji magnetycznej wskaźniki stabilności i odporności na zakłócenia są gorsze, ponieważ sygnał sterujący jest funkcją zmiennych stanu zależnych od sterowania którego pomiar jest niepewny i wyjścia w przypadku zastosowania obserwatora. Z powyższych względów nie można porównać wskaźnika jakościowego kosztów sterowania. Można porównać wskaźniki jakościowe stabilizacji (254).

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \quad (251)$$

gdzie

$I$  natężenie prądu

$H$  natężenie pola magnetycznego jest równoważne energii pola magnetycznego

$B$  indukcja pola magnetycznego

$\mu_0$  przenikalność magnetyczna próżni

$\mu_r$  względna przenikalność magnetyczna substancji

gdzie z prawa Biota-Savarta natężenie pola magnetycznego w odległości  $r$  od źródła pola dane jest wzorem

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi |\vec{r}|^3} \quad (252)$$

gdzie

$\vec{r}$  wektor dla punktów wytwarzających pole i miejsca pola

$r$  odległość elementu przewodnika od punktu pola

$d\vec{l}$  wektor o kierunku przewodnika i zwrocie odpowiadającym kierunkowi prądu i długości równej długości elementu przewodnika

Przyjęto założenie, że wskaźnikiem jakości będzie wariancja położenia oraz sterowania w zadaniu stabilizacji

$$Var[X] = E[(X - \mu)^2]. \quad (253)$$

Wariancję można estymować za pomocą n-elementowej próby losowej. Dla nieobciążonego estymatora dana jest równaniem (254) [Bronsztajn et al. (2007)]

$$\text{var}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (254)$$

$$\text{var}_{LQR}^2(u) = 2.3118e - 04 \quad (255)$$

$$\text{var}_{LQR}^2(y) = 1.1467e - 09 \quad (256)$$

$$\text{var}_{PID}^2(u) = 0.0063 \quad (257)$$

$$\text{var}_{PID}^2(y) = 8.8966e - 10 \quad (258)$$

$$\frac{\text{var}_{LQR}^2(u)}{\text{var}_{PID}^2(u)} = 0.0367 \quad (259)$$

$$\frac{\text{var}_{LQR}^2(y)}{\text{var}_{PID}^2(y)} = 1.2889 \quad (260)$$

$$J_{LQR(y/u)} = \frac{\text{var}_{LQR}^2(y)}{\text{var}_{LQR}^2(u)} = 4.9602e - 06 \quad (261)$$

$$J_{PID(y/u)} = \frac{\text{var}_{PID}^2(y)}{\text{var}_{PID}^2(u)} = 1.4122e - 07 \quad (262)$$

$$\frac{J_{LQR(y/u)}}{J_{PID(y/u)}} = 35.1239 \quad (263)$$

Analizując sygnał położenia kulki dla modelu sterowanego regulatorem LQR na wykresie (Rys. 69), można zaobserwować trend oscylacyjny, który można zinterpretować jako nieoptymalny dobór wartości własnych obserwatora. Dla wskaźnika jakościowego (254) sterowanie regulatorem LQR daje znacząco lepsze wskaźniki na sterowanie, przy nieznacznie gorszych wskaźnikach stabilizacji wyjścia systemu. Doświadczenia laboratoryjne na stanowisku badawczym lewitacji magnetycznej weryfikują i potwierdzają tezy rozprawy oraz założenia i dowody matematyczne podane w publikacjach [Khalil (2015)], [Khalil and Hassan (2017)].

## 5 Linearyzacja systemów z uszkodzeniami

W systemach fizycznych przyczyną nieliniowości mogą być defekty lub uszkodzenia. Systemy z uszkodzeniami mogą być linearyzowane poprzez zastosowanie regresji liniowej i modeli matematycznych [Latocha (2018b)]. Zadania wykrywania uszkodzeń ich izolacji i rekonstrukcji FDIR (ang. Fault Detection Isolation and Recovery) są ważnym obszarem badań w obszarze systemów dynamicznych. Usterkę uznaje się za występującą, gdy w systemie wystąpią zdarzenia niekorzystne, które spowodują, że stan systemu określa się jako niestandardowe warunki, takie jak nieprawidłowe działanie urządzeń wykonawczych lub sensorów [Tan and Edwards (2002)]. Wykrywanie usterek metodami oceny parametrycznej w procesach dynamicznych jest jednym z głównych obszarów badań [Isermann (2005)], [Cho et al. (2018)]. Takie podejście wymaga znajomości modelu matematycznego procesu. W pracy zaproponowano wykorzystanie regresji liniowej do predykcji wartości oczekiwanej zmiennej stanu na podstawie której szacowany jest przedział uszkodzeń. Dla oszacowanego przedziału uszkodzeń zaproponowano zastosowanie rekurencyjnego algorytmu regresji liniowej do rekonstrukcji wartości uszkodzonych danych pomiarowych. W systemach liniowych, posługując się modelem obliczonym z danych referencyjnych, można wykryć defekty systemu, zlokalizować oraz zrekonstruować poprawne wartości danych pomiarowych dla dowolnych uszkodzeń na dowolnym horyzoncie w każdym stanie, poprzez zastosowanie prognozy modelu predykcyjnego do szacowania wartości oczekiwanej [Latocha (2018b)]. Większość systemów fizycznych to systemy nieliniowe. W przypadku systemów nieliniowych problem FDIR nie jest deterministyczny. Z powyższych względów w pracy rozważono podejście oparte na oszacowaniu systemu nieliniowego z wykorzystaniem rekurencyjnej regresji liniowej. Dany jest system nieliniowy opisany równaniami stanu w dyskretniej dziedzinie czasu (264), (265), którego estymator liniowy można zapisać w postaci równań (127, 265), (129) z akceptowalnym błędem.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (264)$$

$$y(k) = f(Cx(k)) + e_{min} \quad (265)$$

### 5.1 Algorytm predykcyjny do szacowania i wstępnej korekcji usterek systemu nieliniowego

Przyjmując założenie, że uszkodzenie sensora generuje asymetryczny rozkład nieprawidłowego pomiaru, dla modelu referencyjnego (136) zidentyfikowanego w przedziale  $k = 1 \dots N$  zawierającym poprawne dane pomiarowe można wygenerować wartości predykcyjne w przedziale  $N \dots M$  (266).

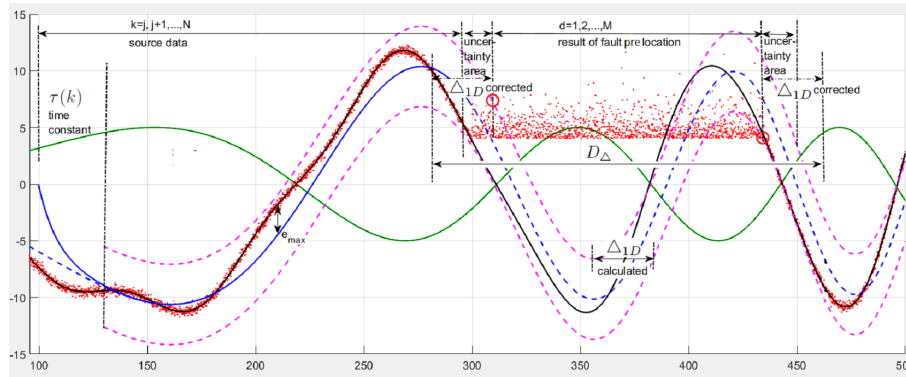
$$\hat{y}_{NM}(k) = Z^{-1}[\hat{G}_N(z)\tilde{U}_{NM}(z)]; \quad k = N, N+1 \dots M \quad (266)$$

gdzie  $k = j \dots N$  jest zakresem danych referencyjnych, a  $k = N \dots M$  horyzontem predykcji. W celu identyfikacji i lokalizacji uszkodzonych wartości danych na horyzoncie  $N \dots M$ , jako kryterium oceny uszkodzenia przyjęto kryterium błędu predykcji [Xu et al. (2017)]. Dla danych źródłowych obliczono maksymalny błąd estymacji (267), na przedziale  $[k(\tau), k(\tau) + 1, \dots, N]$  (Rys. 71).

$$e_{max}(k) = \hat{y}_N(k) - y_N(k); \quad k \in k(\tau) \dots N \quad (267)$$

gdzie  $k(\tau)$  jest dyskretną stałą czasową modelu wzorcowego. Wariancję danych na przedziale  $[k(\tau), k(\tau) + 1, \dots, N]$  obliczono za pomocą równania (268)

$$\sigma_N(k) = \sqrt{\frac{1}{N - j - \tau(k)} \sum_{k=j+\tau(k)}^N (y_N(k) - E\hat{y}_N(k))^2} \quad (268)$$



Rysunek 71: Detekcja uszkodzenia.

Na przedziale predykcji  $k \in [N \dots M]$ , zdefiniowano górny (269) i dolny limit (270), błędu predykcji.

$$y_{sup}(k) = \hat{y}(k) + e_{max,N}(k) + \sigma_N(k), \quad (269)$$

$$y_{inf}(k) = \hat{y}(k) - e_{max,N}(k) - \sigma_N(k), \quad (270)$$

Dane w zakresie górnej i dolnej granicy (269, 270) horyzontu predykcji  $k \in [N \dots M]$  zdefiniowano jako poprawne, dane poniżej dolnego i powyżej górnego limitu predykcji (271, 272) zdefiniowano jako uszkodzenia (Rys. 71). Dla kryteriów uszkodzenia (271, 272) wskaźnik dyskretnych danych zdefiniowano jako  $d$  (273) (Rys. 71).

$$\exists d = k, \forall (y_{sup}(k) - y(k)) < 0 \quad (271)$$

$$\exists d = k, \forall (y_{inf}(k) - y(k)) > 0 \quad (272)$$

$$D = f_D(k) = [d_1, \dots, d_n]. \quad (273)$$

Wstępna, szacunkowa lokalizacja obszaru uszkodzenia jest określana przez warunki (271, 272) i zdefiniowana jako wektor uszkodzenia  $D$  (273).

## 5.2 Eksperymenty numeryczne FD

Detekcja uszkodzonego obszaru danych. Dany jest system dynamiczny opisany równaniami w dziedzinie dyskretnej z czasem próbkowania  $\Delta t = 0.1[s]$  podlegający zakłóceniom Gaussowskim (274, 275)

$$G(z) = \frac{-0.3832z^2 - 0.2338z + 0.06683}{z^3 - 1.127z^2 + 0.494z - 0.1129}, \quad (274)$$

$$y(k) = \sin(0.1k)(Z^{-1}[G(z)U(z)]) + \varepsilon. \quad (275)$$

$$x \in \mathbb{R}^n; u \in \mathbb{R}^m; y \in \mathbb{R}^r, \quad (276)$$

Dane pomiarowe z systemu zostały uszkodzone w przedziale dyskretyzacji (278) zakłóceniami o rozkładzie wykładniczym (Rys. 71). Obliczona wstępna lokalizacja uszkodzonego obszaru z wykorzystaniem proponowanego algorytmu predykcji dana jest wartościami wskaźnika (277)

$$k_c = 3094...4330, \quad (277)$$

gdzie wskaźnik rzeczywistych uszkodzonych danych zawiera się w zakresie

$$k_r = 2999....4335. \quad (278)$$

Wartość wskaźnika lokalizacji uszkodzenia (277) obciążona jest obszarami niepewności w otoczeniu lewej i prawej granicy (Rys. 71). Niepewność lokalizacji uszkodzenia jest źródłem znaczących błędów w algorytmie linearyzacji. Za wskaźnik jakości rekonstrukcji wadliwych danych przyjęto równanie błędu średniokwadratowego (279)

$$e_D = \frac{1}{M} \sum_{d=1}^M (Ey(d) - \hat{y}(d))^2. \quad (279)$$

Wartość błędu średniokwadratowego rekonstrukcji uszkodzonych danych na podstawie predykcji wartości oczekiwanej modelu liniowego (266) wynosi

$$e_D = 87.8175. \quad (280)$$

### 5.3 Rekurencyjny algorytm rekonstrukcji uszkodzonych danych

W rozdziale omówiono nowe podejście do rekonstrukcji uszkodzonych danych. Do wstępnej lokalizacji uszkodzonego obszaru wykorzystano model liniowy i predykcję wartości oczekiwanej opisane w rozdziale 4.10.1. Wstępna lokalizacja uszkodzonego obszaru danych (Rys. 71) obciążona jest niepewnością położenia granicy lewo i prawo stronnej, obciążenie jest źródłem znaczących błędów w rekonstrukcji danych. Przyjęto założenie, że przedział danych niepewnych  $\Delta_{1D}$  będzie wartością pierwszej maksymalnej odległość na osi  $k$  pomiędzy tymi samymi wartościami limitów  $y_{sup1}$  i  $y_{inf1}$  (269, 270) w uszkodzonym przedziale, jak pokazano na (Rys. 71). Dla powyższego założenia w celu lokalizacji obszaru uszkodzenia (277), przedział niepewności  $\Delta_{1D}$  (281) dodano do granicy lewo i prawostronnej wskaźnika  $k_c$  (277) wstępnie szacującego przedział uszkodzeń (282). Dla rozszerzonych danych o przedział niepewności wykonano obliczenia rekurencyjne, które pozwoliły zminimalizować obciążenie estymatora liniowego.

$$\exists \Delta_{1D} = \max\{k(y_{sup1D}) - k(y_{inf1D}); \forall (y_{sup1D} = y_{inf1D})\} \quad (281)$$

Rozszerzony obszar zawiera wstępną lokalizację uszkodzeń za pomocą predykcji modelu linowego oraz dodany do granicy lewo i prawostronnej szacowany obszar niepewności danych (282)

$$D_{\Delta} = d_1 - \Delta_{1D}, \dots, d_1, \dots, d_D, \dots, d_D + \Delta_{1D}. \quad (282)$$

Rekurencyjny algorytm rekonstrukcji uszkodzonych danych dany jest wzorami (283, 284). Rekurencyjne obliczenia wykonywane są do osiągnięcia minimalnej stabilnej wartości wskaźnika błędu (285).

$$\hat{G}_{i+1}(z) = \frac{Y_i(z)}{\tilde{U}(z)}; \quad i = j, \dots, M; \quad i \in \mathbb{N} \quad (283)$$

$$\hat{y}_{i+1}(k) = Z^{-1}[\hat{G}_{i+1}(z)\tilde{U}(z)] \quad (284)$$

Wartość błędu średnio kwadratowego dla uszkodzonych danych uzyskano z równania (285), gdzie  $\dim(D_{\Delta})$  jest liczbą uszkodzonych próbek powiększoną o przedział niepewności  $\Delta_{1D}$ .



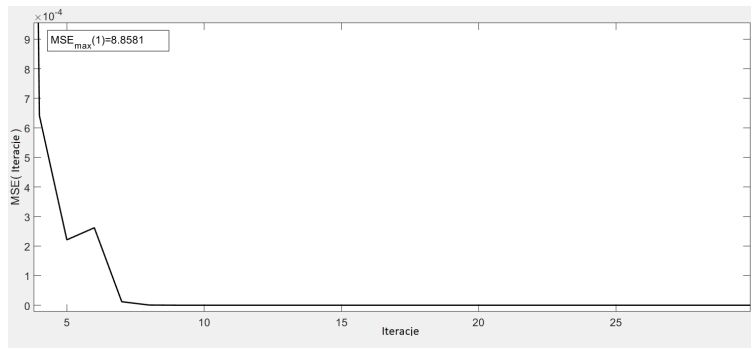
$$e_{D(i+1)} = \frac{1}{\dim(D_\Delta)} \sum_{d=1}^{\dim(D_\Delta)} (Ey(d_\Delta) - y_{i+1}(d_\Delta))^2 \quad (285)$$

Dokładną lokalizację uszkodzenia po rekurencyjnej rekonstrukcji wartości oczekiwanej można określić jako odchylenie od wariancji zakłóceń (286)

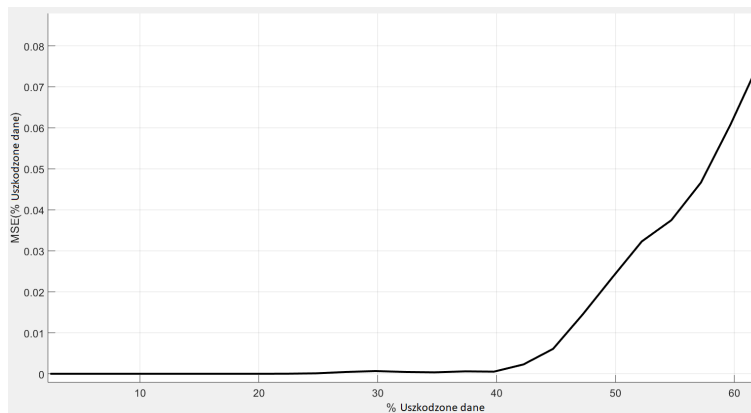
$$y_{Drr}(d) > E\hat{y}_i(d) \pm \sigma_N(k). \quad (286)$$

#### 5.4 Eksperymenty numeryczne FDIR

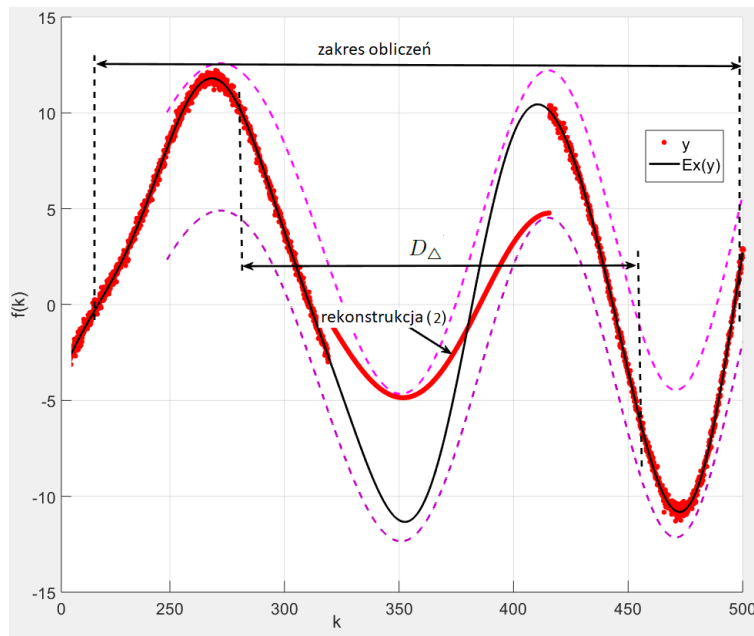
Dla systemu dyskretnego (274) zarejestrowano przebieg sygnału testującego i odpowiedzi. Zarejestrowany sygnał wyjściowy z systemu posiada przedział danych uszkodzonych (278).



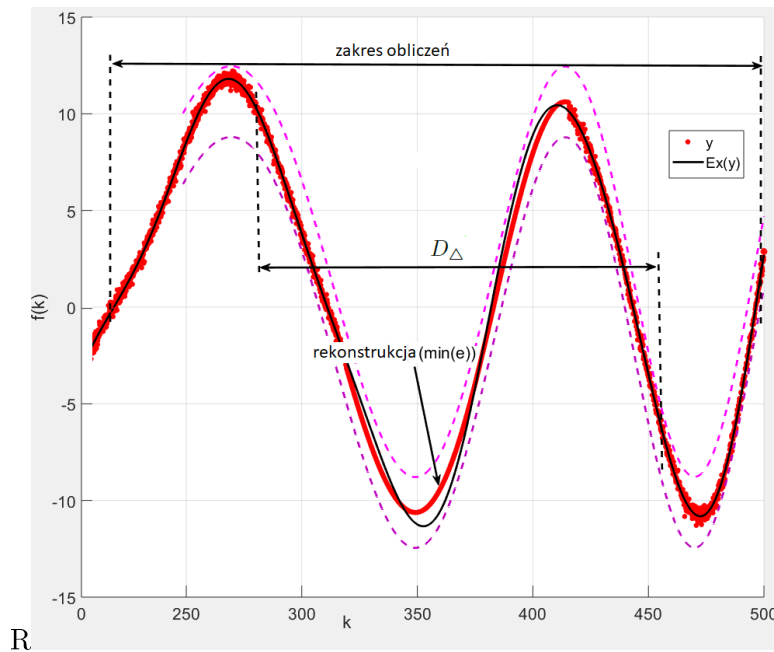
Rysunek 72: Zależność błędu rekonstrukcji uszkodzonych danych od ilości obliczeń rekurencyjnych.



Rysunek 73: Zależność błędu rekonstrukcji uszkodzonych danych od wielkości przedziału uszkodzenia dla 10 obliczeń rekurencyjnych.



Rysunek 74: Rekurencyjna rekonstrukcja uszkodzonych danych dla dwóch rekurencji.



Rysunek 75: Rekurencyjna rekonstrukcja uszkodzonych danych dla minimalnej wartości wskaźnika jakości.

W przeprowadzonych eksperymentach numerycznych wykonano estymację wartości oczekiwanej uszkodzonych danych uzyskując akceptowalną wartość wskaźnika jakości po wykonaniu dziesięciu obliczeń rekurencyjnych dla obszaru uszkodzeń nie przekraczającego 40% danych użytych w obliczeniach (Rys. 72), (Rys. 73), (Rys. 74), (Rys. 75).

### 5.5 Wnioski dotyczące linearyzacji systemów z uszkodzeniami

Zaproponowany algorytm zapewnia dokładne, stabilne i powtarzalne wyniki dla systemów, których nieliniowości powstały w wyniku uszkodzeń. Zaproponowany algorytm jest niezależny od warunków początkowych i wstępnej parametryzacji. Zastosowanie regresji liniowej oraz modeli matematycznych stanowi innowację w dziedzinie FDIR. Pozwala na osiągnięcie wysokiej dokładności w lokalizacji i rekonstrukcji uszkodzonych danych. W porównaniu z podejściem klasycznym prezentowanym w publikacjach [Jiang et al. (2008)], [He et al. (2013)], [Tan and Edwards (2002)] proponowany algorytm nie wymaga znajomości wewnętrznej struktury modelu. Prezentowane rozwiązanie można zastosować w systemach rzeczywistych. Proponowany algorytm można opisać za pomocą równań skończenie wymiarowych z akceptowalnym poziomem błędu. Przedstawiony algorytm pozwala na rozwiązanie problemu FDIR w przedziale zawierającym ilość danych znacznie większą od rzędu modelu użytego w regresji liniowej, przy założeniu że dane uszkodzone nie mogą przekroczyć 40% danych użytych w obliczeniach. Algorytm może być stosowany jako aktywna metoda diagnozowania uszkodzeń w systemach automatyki [Odgaard et al. (2015)].

## 6 Obserwator nieliniowy

### 6.1 Obserwator nieliniowy w sterowaniu LQR

Przyjmując założenie, że system nieliniowy SISO (77), (78) jest lokalnie sterowalny, można estymować dynamikę zmiennych stanu w otoczeniu punktu referencyjnego algorytmem opisanym w rozdziale (Rozdział 4.2.7). Dla estymatora liniowego (287), można wyznaczyć uśrednioną estymatę wzmocnienia na przedziale, wykorzystując funkcję skoku jednostkowego (288), dla ilości punktów dyskretyzacji znacząco większej od największej stałej czasowej

$$\hat{G}_{ObNL}(z) = \frac{\hat{b}_1}{z^3 + \hat{a}_3 z^2 + z \hat{a}_2 + \hat{a}_1}; \quad n \in \mathbb{N}; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (287)$$

$$\hat{K}_{0NL} = \sup_{k \gg \tau_{max}(k)} (step(\hat{G}_{ObNL}(z))); \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad N \gg \tau_{max}(k). \quad (288)$$

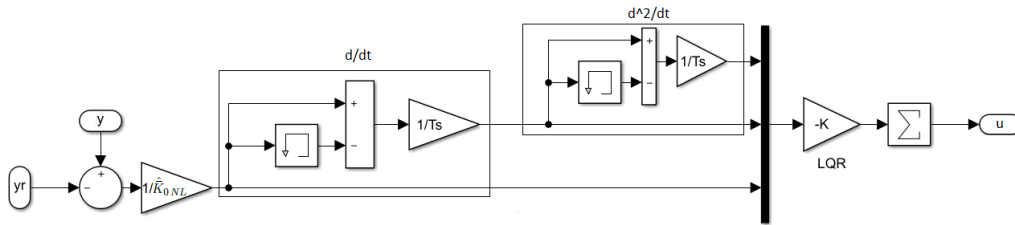
Dla uśrednionej na przedziale estymaty wzmocnienia  $\hat{K}_{0NL}$  oraz kroku różniczkowania  $\Delta t$ , estymaty zmiennych stanu systemu nieliniowego dane są wzorami (289), (290), (291), gdzie  $k = \Delta t = Ts$  jest wartością kroku dyskretyzacji

$$\hat{\xi}_1(k) = \frac{y(k)}{\hat{K}_{0NL}}, \quad (289)$$

$$\hat{\xi}_2(k) = \dot{\hat{\xi}}_1(k) = \frac{\hat{\xi}_1(k) - \hat{\xi}_1(k-1)}{\Delta t}, \quad (290)$$

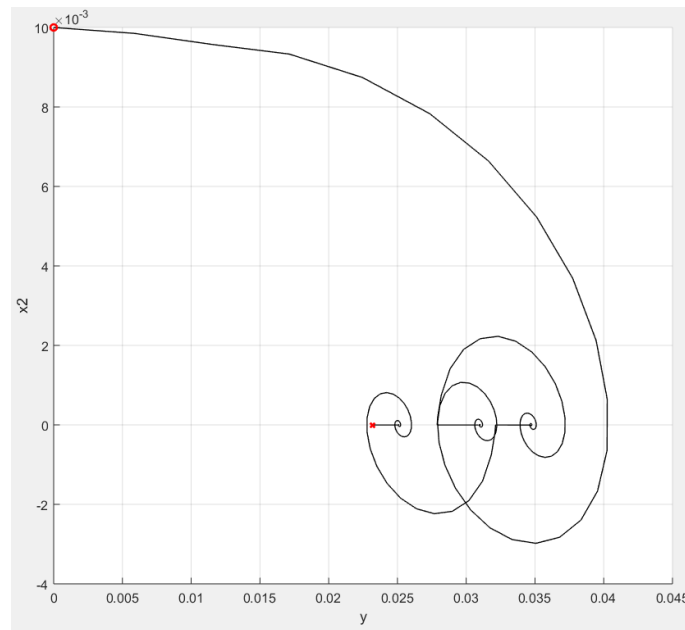
$$\hat{\xi}_3(t) = \dot{\hat{\xi}}_2(k) = \frac{\hat{\xi}_2(k) - \hat{\xi}_2(k-1)}{\Delta t^2}. \quad (291)$$

Realizację obserwatora nieliniowego w systemie sterowania (Rys. 17) przedstawiono na (Rys. 76).

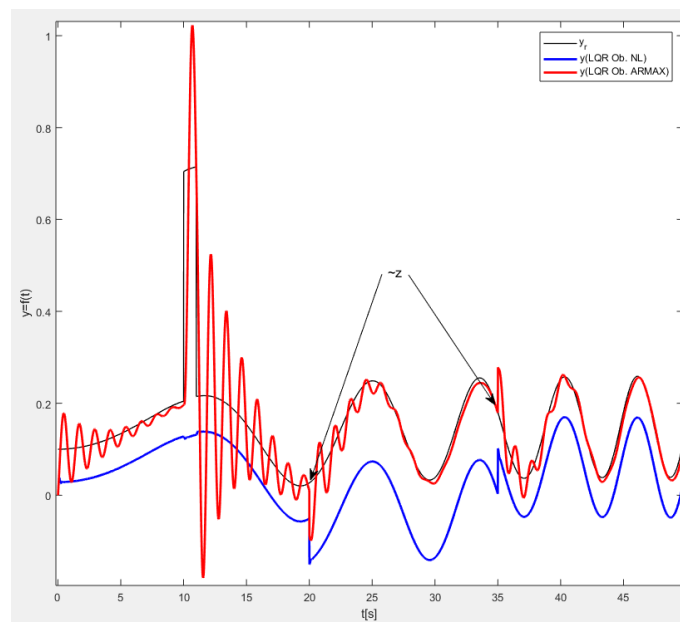


Rysunek 76: Realizacja obserwatora nieliniowego w Matlab/Simulink.

Metodą topologiczną płaszczyzny fazowej przeprowadzono badanie układu (Rys. 17) z obserwatorem nieliniowym (Rys. 76) dla zadania stabilizacji oraz śledzenia trajektorii referencyjnej (Rys. 18). Badania przeprowadzono dla modelu Hammersteina-Wienera (227), (228). Na (Rys. 77) przedstawiono trajektorie zmiennych stanu modelu (227), (228) poddane zakłóceniom na wyjściu w zadaniu stabilizacji.



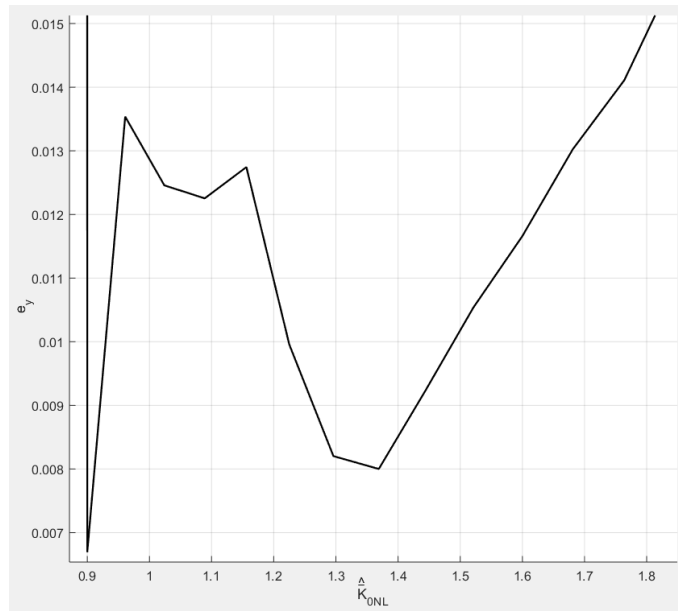
Rysunek 77: Trajektorie stanu układu regulacji LQR (Rys. 17) systemu nieliniowego z obserwatorem (Rys. 76) w zadaniu stabilizacji.



Rysunek 78: Porównanie obserwatora liniowego (199) i nieliniowego w sterowaniu LQR po trajektorii referencyjnej  $y_r(t)$ .

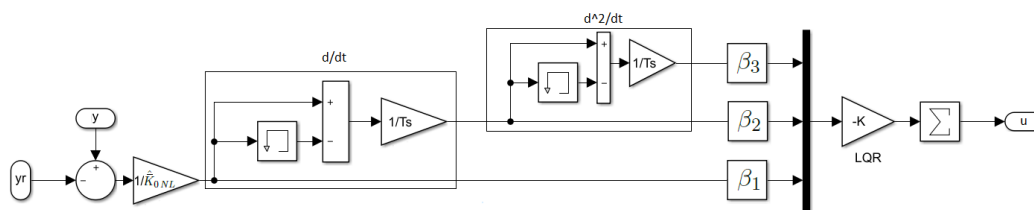
Porównano wskaźnik jakości (219) w zadaniu sterowania po trajektorii referencyjnej  $y_r(t)$  z obserwatorem (199) oraz obserwatorem nieliniowym (289, 290, 291), (Rys. 78). Wskaźnik jakości (219) sterowania po trajektorii referencyjnej  $y_r(t)$  dla obserwatora nieliniowego (289, 290, 291) wynosi  $MSE_{Ob\_NL} = 0.0204$ , dla obserwatora linearyzującego ARMAX (198) jest znacząco mniejszy  $MSE_{Ob\_ARMAX} = 0.006$ . System zbudowany z obserwatora nieliniowego (289, 290, 291) oraz re-

gulatora linowego LQR obliczonego dla modelu zlinearyzowanego wg algorytmu (Rozdział 4.2.7) wykazuje własności stabilizacji w pewnym zakresie wolno zmiennej dynamiki dla słabych nielino-wości, nie wykazuje własności korekcyjnych jakie posiadają obserwatory o wysokim wzmocnieniu (Rozdział 4.5), (Rozdział 4.6). W dalszej kolejności przeprowadzono badanie wpływu wzmocnienia obserwatora nieliniowego (289, 290, 291) na błąd sterowania po trajektorii referencyjnej (Rys. 79).



Rysunek 79: Błąd obserwatora nieliniowego w funkcji wzmocnienia modelu linearyzującego ARMAX.

Z wyników przeprowadzonych eksperymentów (Rys. 79) nasuwa się wniosek, że w zadaniu sterowania LQR z obserwatorem nieliniowym wskaźniki jakości można poprawić poprzez zastosowanie korekcji estymat (292), (293), (294), (Rys. 80).



Rysunek 80: Obserwator nieliniowy i regulator LQR w systemie Matlab/Simulink.

$$\hat{\xi}_1(k) = \beta_1 \frac{y(k)}{K_{ONL}}, \quad (292)$$

$$\hat{\xi}_2(k) = \beta_2 \frac{\hat{\xi}_1(k) - \hat{\xi}_1(k-1)}{\Delta t} \quad (293)$$

$$\hat{\xi}_3(t) = \beta_3 \frac{\hat{\xi}_2(k) - \hat{\xi}_2(k-1)}{\Delta t^2} \quad (294)$$

---

## 7 Filtry adaptacyjne

Systemy automatyki podlegają zakłóceniom, które determinują ich dokładność oraz poprawność wykonywanych operacji. Zakłócenia mogą być przyczyną błędów pomiarowych. Jeżeli zakłócenia nie zostaną uwzględnione, pomiary mogą być obciążone dużą niepewnością, nieakceptowalnymi błędami. Z powyższych względów w inżynierii systemów sterowania i bezpieczeństwa procesów ważne jest obliczenie nie obciążonych wartości zmiennych stanu. W pracy przedstawiono algorytm obliczania współczynników dyskretnej funkcji filtrującej. Zaproponowany algorytm wykorzystuje metodę regresji liniowej, estymację najmniejszych kwadratów błędu równania (108) dla funkcji bazowej ARMAX (95) do obliczenia optymalnych współczynników funkcji filtrującej IIR-MA, która dla rozkładów Gussa jest funkcją największej wiarygodności MLE (ang. maximum likelihood estimation) [Soderstrom and Stoica (1989)]. Klasyczne metody filtrowania sygnałów pochodzących z systemów dynamicznych, których struktura nie jest znana, model matematyczny jest niepewny oraz nie są znane są parametry rozkładu zakłóceń, a także gdy zakłócenia nie są rozkładem Gausowskim, są trudne do zastosowania w złożonych systemach automatyki. W komputerowych systemach sterowania dane najczęściej pochodzą z pomiarów, są wartościami dyskretnymi obciążonymi niepewnością pomiarową wynikającą z zakłóceń i błędów numerycznych. Obliczenie funkcji filtrującej z danych dyskretnych uzyskanych z pomiarów, która będzie estymować wartość oczekiwaną w punktach dyskretyzacji określają szacunki wiarygodności próbek danych. Z powyższych względów ważne jest wybranie reguły szacowania, która najlepiej zrealizuje zadanie szacowana wartość oczekiwanej w punktach dyskretyzacji z akceptowalnym poziomem błędu. W fizycznych systemach dynamicznych wyznaczenie jawnej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa wokół dynamicznej krzywej trajektorii systemu jest trudne. Rozwiązaniem tego problemu zajmuje się teoria estymatorów jądrowych [Rosenblatt (1956)].

### 7.1 Sformułowanie problemu filtracji dla estymatora jądrowego

W pracy do filtracji zakłóceń wykorzystano oszacowanie jądra KDE (ang. Kernel Density Estimation), które gromadzi i rozprasza potencjał. Koncepcję jądra gromadzącego i rozpraszającego potencjał zaproponował [Parzen (1962)], [Parzen and Cheng (1997)]. Koncepcja KDE wg. [Parzen (1962)], [Parzen and Cheng (1997)] opiera się na funkcji gęstości prawdopodobieństwa [Parzen (1962)], [Parzen and Cheng (1997)], (295).

$$F(x) = C \int_{-\infty}^x f(x') dx'; \quad x(t) \in R, \quad F(x) \in R \quad (295)$$

Forma jądra nie jest kluczowa, kluczowe są właściwości gromadzenia i rozpraszania potencjału. Z powyższych względów do formacji jądra wykorzystano estymację najmniejszych kwadratów błędu równania dla funkcji bazowej (95). Wyliczono filtr o średniej ruchomej i nieskończonej odpowiedzi IIR-MA. Estymatory gęstości zaproponowane przez [Parzen (1962)], [Parzen and Cheng (1997)] są potencjalnymi funkcjami, które w połączeniu z punktami danych dają nieparametryczną estymację gęstości prawdopodobieństwa dla każdej z klas punktów. Potencjalne funkcje lub jądra są lokalnie parametryczne, ale nie zakładają nic o rozkładach globalnych, które są określone przez łączenie punktów danych. Koncepcja Parzena zakłada znajomość modelu dynamiki systemu i dystrybucji zakłóceń. W zagadnieniach filtracji oraz estymacji wartości oczekiwanej problemem jest wyznaczenie funkcji estymującej wartość oczekiwaną sygnału pochodzącego z systemu, którego model matematyczny nie jest znany. Koncepcja [Parzen (1962)], [Parzen and Cheng (1997)] jest dowodem matematycznym na istnienie rozwiązań. Podobne wnioski i dowody na istnienie rozwiązań zostały

zawarte w publikacji [Elliott and Vikram (1997)], w której zaproponowano, że rozwiązaniem problemu estymacji wartości oczekiwanej może być skończenie wymiarowa funkcja filtrująca. Badania [Parzen (1962)], [Parzen and Cheng (1997)], [Elliott and Vikram (1997)] wykazały, że trudno jest zbudować funkcję maksymalnej wiarygodności (MLE) dla sygnału pochodzącego z systemu, którego model nie jest znany. Badania prezentowane przez [Parzen (1962)], [Parzen and Cheng (1997)] oraz [Elliott and Vikram (1997)] opierały się na założeniu, że znane są parametry rozkładu zakłóceń. W systemach fizycznych parametry rozkładu zakłóceń możemy szacować, co jest źródłem błędów, które powodują pogorszenie wskaźników jakości rozwiązań klasycznych. Niedokładność oszacowania parametrów rozkładu zakłóceń ma znaczący wpływ na estymację filtru Kalmana. Z powyższych względów w pracy zaproponowano nowe podejście do wyznaczenia funkcji największej wiarygodności, estymującej wartość oczekiwaną. Koncepcję oparto na modelu dynamiki systemu SISO opisanego równaniem różniczkowym (12), które jest formą jądra, posiada właściwości gromadzenia i rozpraszania potencjału. Dla funkcji bazowej (12) właściwości filtracyjne determinuje wymiar i współczynniki. Właściwości filtracyjne funkcji (12) wykorzystano do budowy estymatora jądrowego.

## 7.2 Funkcja filtrująca

Zadaniem proponowanego algorytmu filtrującego jest obliczenie optymalnych współczynników funkcji filtrującej dla sygnałów pochodzących z systemów dynamicznych o nieznannej strukturze i nieznanymi parametrach dystrybucji zakłóceń, z możliwością implementacji w numerycznych systemach obliczeniowych. Z powyższych względów rozważono równania w dyskretnej dziedzinie czasu. Uwarunkowanie zadania w dyskretnej dziedzinie czasu pozwala na wykorzystanie wartości dyskretnych sygnału z pomiaru do obliczenia współczynników funkcji filtrującej. W dziedzinie czasu dyskretnego system można opisać za pomocą modelu ARMAX (95). Zadanie optymalizacji funkcji filtrującej sprowadza się do obliczenia współczynników modelu ARMAX z dyskretnych próbek pomiarowych [Latocha (2018)]. Problem dotyczy klasy systemów opisanych równaniem różnicowym (296), gdzie  $u(k)$  i  $y(k)$  odnoszą się do dyskretnych wartości sekwencji próbek w równych odstępach czasu [Soderstrom and Stoica (1989)]. Zakłócenia generują błędy równania (296). Współczynniki funkcji filtrującej (95) można obliczyć z równania (296) za pomocą estymatora najmniejszych kwadratów (108). Błąd modelu ARMAX (96) dodano do błędu równania LSE (296).

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) + \varepsilon = b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m); \quad \varepsilon \in \mathbb{R}; k \gg n, m \leq n, k \in \mathbb{N} \quad (296)$$

gdzie:  $b_1, \dots, b_m; a_1, \dots, a_n$  poszukiwane współczynniki. Zakładając, że dynamikę sygnału będziemy przybliżać rekurencyjnie modelem pierwszego rzędu (297)

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + \varepsilon = b_1 u(k-1) \quad (297)$$

otrzymamy dwukolumnową macierz danych dyskretyzacji

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y_1 & u_1 \\ -y_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots \\ -y_{N-1} & u_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (298)$$

Rozwiązując problem estymacji LSE (108) błędu równania dla macierzy danych (298), otrzymamy estymaty współczynników  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  transmitancji dyskretnej (299)

$$\hat{G}_n(z) = \frac{\hat{b}_{n1}}{\hat{a}_{n2}z + \hat{a}_{n1}}, \quad (299)$$



dla

$$\hat{a}_2 = 1; |\hat{a}_1| \leq 1; \hat{b}_1 \neq 0. \quad (300)$$

### 7.3 Rekurencyjny algorytm filtrowania

Dla sygnału podlegającego zakłóceniom nie można użyć bezpośrednio algorytmu LSE do estymacji współczynników funkcji filtrującej, ponieważ dostępny jest wektor danych pojedynczego sygnału. Z powyższego względu, aby spełnić założenia LSE do danych dyskretnych, wprowadzono operator przesunięcia  $q^{-\nu}$ , gdzie ujemny argument  $-\nu$  oznacza przesunięcie wstecz o ilość kroków dyskretyzacji. Zakładając, że okres próbkowania jest kilkakrotnie mniejszy od najmniejszej stałej czasowej modelu, dla dużej ilości próbek możemy założyć, że przesunięcie w tył próbek o pojedynczy krok dyskretyzacji ma pomijalny wpływ na dynamikę filtrowanego sygnału. W oparciu o powyższe założenia dane w wektorze  $X$  (301) wykorzystano do utworzenia wektora pomocniczego  $Y_1$  (302), który zawiera dane oryginalne  $X$  przesunięte wstecz o optymalną wartość operatora przesunięcia  $q^{-\nu}$ . Wartości początkowe wektora  $Y_1$  uzupełniono wartością  $x_1(1)$ . Wartością końcową wektora  $Y_1$  jest dana o indeksie  $x_1(N - \nu)$ , pozostałe dane odrzucono. Uzyskano ciągi danych (301), (302) dla których zachodzi zależność (303).

$$X = x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(N) \quad (301)$$

$$Y_1 = X(q^{-\nu}) = x_{1_1}(1), \dots, x_{1_\nu}(1), x_1(2), \dots, x_1(N - \nu); \nu > 0; \nu \in \mathbb{N} \quad (302)$$

$$X \approx Y_1 \quad (303)$$

Dla ciągów dyskretnych wartości sygnału (301), (302), zakładając po zastosowaniu estymacji najmniejszych kwadratów, otrzymano równanie wyjścia funkcji filtrującej (304)

$$\hat{Y}_n(k) = Z^{-1} \left[ \hat{G}_{n-1}(z) \hat{Y}_{n-1}(z) \right] \quad (304)$$

Pierwsze oszacowane współczynników funkcji filtrującej (304) zostało obliczone przy użyciu wartości dyskretnych sygnału  $X$ , i sygnału  $Y_1$  przesuniętego wstecz o optymalną wartość operatora  $q^{-\nu}$ ,  $(\hat{a}_1, \hat{b}_1) = LSE(X, X(q^{-\nu}))$ . W wektorze  $Y_1$  (302) rozkład próbek po przesunięciu jest zaburzony. Z definicji LSE estymacja najmniejszych kwadratów może być zastosowana do rozkładu normalnego Gaussa. Jeśli dane mają znaczną asymetrię rozkładu, równanie (297) nie jest prawdziwe i zachodzi nierówność (305).

$$a_2 y(k) + \hat{a}_1 y(k-1) \neq \hat{b}_1 u(k-1) + \varepsilon_n; \forall a_2 = 1 \quad (305)$$

Aby równanie (297) było spełnione dla danych z rozkładu niesymetrycznego, wprowadzono współczynnik korekcji (306),

$$\hat{a}_2 = \alpha a_2, \alpha \in \mathbb{R}; 0 \ll \alpha < 1. \quad (306)$$

Można tak dobrać współczynnik korekcji  $\alpha$  (306), że zachodzi zależność

$$\hat{a}_1 y(k) + \hat{a}_0 y(k-1) + \varepsilon < \hat{b}_0 u(k-1). \quad (307)$$

Zakładając, że  $\hat{\varepsilon}$  jest błędem, który spełnia równanie

$$\hat{\varepsilon} = a_2 y(k) + \hat{a}_1 y(k-1) - \hat{b}_1 u(k-1), \quad (308)$$

nierówność (307) można zamienić na równanie (309).

$$\hat{a}_2 y(k) + \hat{a}_1 y(k-1) + \hat{\varepsilon} = \hat{b}_1 u(k-1) \quad (309)$$

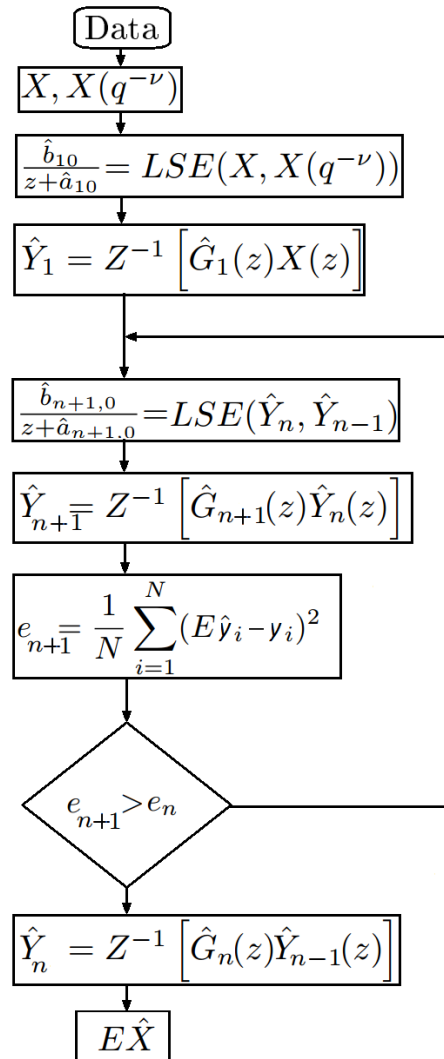
Zamiana nierówności (307) na równanie (309) pozwala na zastosowanie estymacji LSE. Wynikiem rozwiązania równania (309) są suboptymalne wartości estymowanych współczynników  $\hat{a}_n, \hat{b}_n$  funkcji filtrującej (299) dla pewnych klas rozkładów niesymetrycznych. Wynikiem filtracji  $\hat{G}_1(z)$  dla funkcji filtrującej (304) jest pierwsze oszacowanie wartości oczekiwanej w punktach dyskretyzacji  $\hat{Y}_1(k)$  (304). Oszacowanie wartości oczekiwanej z filtracji modelem I rzędu jest obarczone niedokładnością z nieakceptowalnym poziomem błędu (310).

$$e_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E\hat{x}_i - x_i)^2 \quad (310)$$

gdzie  $n$  jest przedziałem danych dyskretnych. Aby zwiększyć dokładność estymacji wartości oczekiwanej, wykorzystano arytmetykę bloków transmitancji. Równanie funkcji filtrującej dane jest wzorem

$$MLE_{D1} = \hat{G}(z) = \hat{G}_1(z)\hat{G}_2(z)\hat{G}_3(z)\dots\hat{G}_n(z). \quad (311)$$

gdzie  $\hat{G}_1(z)\hat{G}_2(z), \dots, \hat{G}_n(z)$  są funkcjami filtrującymi obliczonymi rekurencyjnie (Algorytm 1), [Landau and Karimi (1999)].

**Algorytm 1** Rekurencyjny algorytm filtrowania

Funkcje składowe (311) wyliczane są rekurencyjnie wg (Algorytmu 1), gdy zachodzą zależności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \quad (312)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| < 1, \quad (313)$$

$$e_n < e_{n-1}. \quad (314)$$

Algorytm rekurencyjny (Algorytm 1) generuje dyskretne estymaty wartości oczekiwanej sygnału o malejącej wartości wariancji

$$\exists X \forall \lambda^2(X) : \lambda_1^2(X) > \dots > \lambda_n^2(\hat{Y}_{n-1}), \quad (315)$$

dla których zachodzi zależność

$$\lim_{\lambda^2(X) \rightarrow 0} E\hat{Y}_n \rightarrow EX. \quad (316)$$

Otwartym zagadnieniem badawczym pozostaje optymalizacja wielokryterialna

$$MLE_{D1} = f(\inf(\hat{e}_n), q^{-\nu}, \alpha). \quad (317)$$

Wynikiem przedstawionego algorytmu jest skończenie wymiarowa dyskretna funkcja filtrująca (311). Podobne rezultaty i wnioski są przedstawione w publikacji [Elliott and Vikram (1997)], w której autorzy przedstawili dowód matematyczny na istnienie funkcji filtrującej skończenie wymiarowej momentów wyższego rzędu, dowodząc, że jest najlepszym rozwiązaniem zadania estymacji funkcji największej wiarygodności.

## 7.4 Optymalizacja operatora przesunięcia danych

Zaproponowany algorytm pozwala założyć, że globalne minimum błędu dla operatora przesunięcia  $q^{-\nu}$  jest zlokalizowane w pierwszych kilku krokach przesunięcia. Wyniki zostały potwierdzone empirycznie. Dla powyższego założenia problem optymalizacji wartości operatora przesunięcia  $q^{-\nu}$  można rozwiązać numerycznie.

## 7.5 Bezpośredni algorytm filtrowania

Bezpośrednie oszacowanie wartości oczekiwanej można uzyskać, wykorzystując algorytm opisany wzorem (108) dla modelu wyższego rzędu (187) rozwiązując problem optymalizacji, jak opisano w (Rozdział 108), dla macierzy danych określonej zależnością

$$\Phi = f(X, X(q^{-\nu})). \quad (318)$$

## 7.6 Eksperymenty numeryczne filtracji adaptacyjnej

### 7.6.1 Porównanie własności filtrujących Filtru Kalmana i proponowanego algorytmu filtracji

Dany jest system opisany równaniami różnicowymi (319), (320).

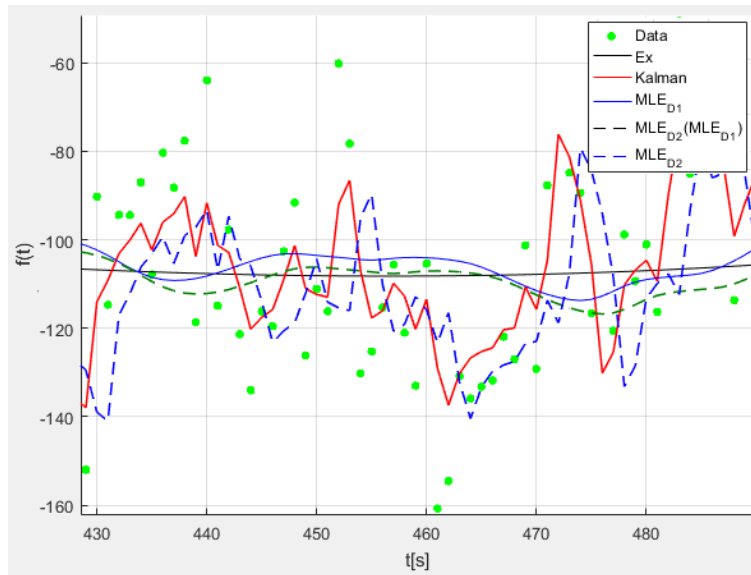
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (319)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (320)$$

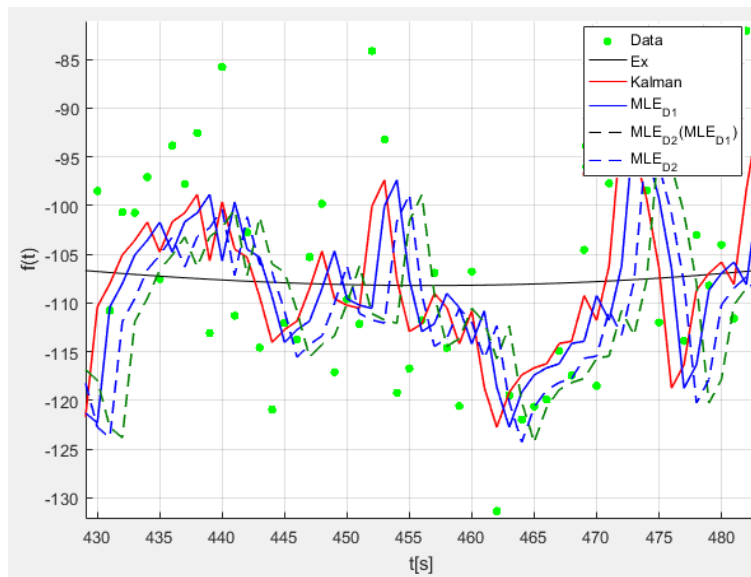
gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1.1269 & -0.4940 & 0.1129 \\ 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.3832 \\ 0.5919 \\ 0.5191 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], D = 0 \quad (321)$$

Estymator Kalmana zapewnia optymalne rozwiązanie dyskretnych problemów estymacji funkcji wyjścia systemu, określa optymalne wzmocnienie statyczne filtru  $M$  w stanie ustalonym na podstawie kowariancji szumu procesowego  $Q$  i kowariancji szumu pomiarowego z sensora  $R$ . Dla układu (319), (320) przyjmujemy  $Q = 1$ ,  $R = 1$ , dla  $N = 1001$  danych dyskretnych.



Rysunek 81: Porównanie filtru Kalmana i proponowanych algorytmów filtracji dla zakłóceń o rozkładzie Gaussa i wartości kowariancji  $MeasErrCov = 808.8874$ .



Rysunek 82: Porównanie filtru Kalmana i proponowanych algorytmów filtracji dla zakłóceń o rozkładzie Gaussa i wartości kowariancji  $MeasErrCov = 202.2218$ .

$$MeasErrCov = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Ex_i - x_i)^2 \quad (322)$$

$$EstErrCov = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Ex_i - \hat{x}_i)^2 \quad (323)$$

gdzie

$MLE_{D1}$  rekurencyjny algorytm filtracji (Alg. 1)

$MLE_{D2}$  bezpośredni algorytm filtracji dla modelu trzeciego rzędu (187)

$MLE_{D2}(MLE_{D1})$  kaskadowy algorytm filtracji, filtracja algorytmem rekurencyjnym  $MLE_{D1}$  następnie filtracja bezpośrednia z wykorzystaniem modelu wyższego rzędu

Wartości kowariancji zakłóceń, dla których metodą optymalizacji numerycznej wyznaczono współczynniki przesunięcia oraz korekcji:

$$MeasErrCov = 202.2218, q^{-1}, \alpha = 0.999$$

$$MeasErrCov = 454.9992, q^{-2}, \alpha = 0.997$$

$$MeasErrCov = 808.8874, q^{-3}, \alpha = 0.995$$

Filter\Error	$MeasErrCov$	$EstErrCov$
<i>Kalman</i>	808.8874	235.0980
<i>Kalman</i>	454.9992	132.2426
<i>Kalman</i>	202.2218	58.7745
$MLE_{D1}$	808.8874	158.6751
$MLE_{D1}$	454.9992	133.7044
$MLE_{D1}$	202.2218	59.8876
$MLE_{D2}(MLE_{D1})$	808.8874	180.8494
$MLE_{D2}(MLE_{D1})$	454.9992	139.8384
$MLE_{D2}(MLE_{D1})$	202.2218	64.0097
$MLE_{D2}$	808.8874	241.7661
$MLE_{D2}$	454.9992	137.0847
$MLE_{D2}$	202.2218	62.1484

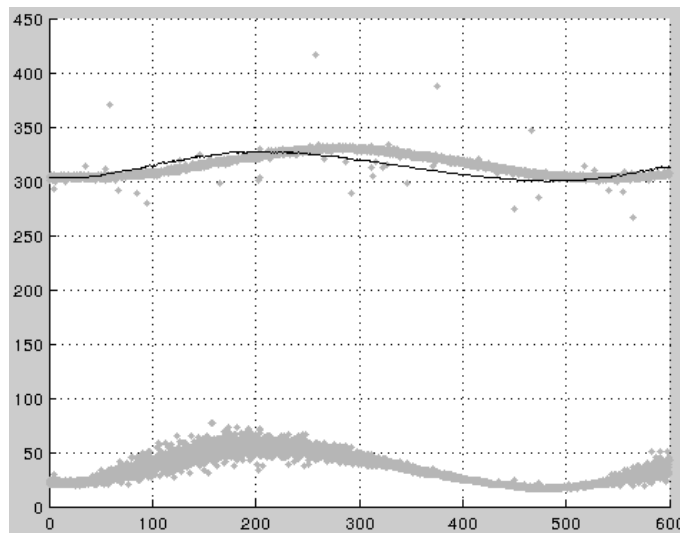
Tablica 3: Porównanie wskaźników jakości filtracji dla filtru Kalmana i proponowanych algorytmów filtracji dla zakłóceń o różnej wartości wariancji.

### 7.6.2 Filtracja sygnału procesowego z laboratoryjnej kolumny destylacyjnej

Przedstawiony algorytm filtracji wykorzystano w filtracji adaptacyjnej w celu wstępnego odfiltrowania zakłóceń dla algorytmu identyfikacji podsystemu w rozumieniu punktu pomiarowego na wejściu  $u = L175$  do kolejnego punktu pomiarowego w torze przepływu masy i energii  $y = L176$ , który przyjęto za wyjście podsystemu. Wartości sygnałów bez filtracji (Rys. 83) i po filtracji (Rys. 84). W (Tabeli 4) porównano wskaźniki jakości ((Rys. 82),323) identyfikacji systemu metodą najmniejszych kwadratów bez filtracji zakłóceń oraz z filtracją zakłóceń algorytmem rekurencyjnym  $MLE_{D1}$  (Rozdział 7.3).

Tablica 4: Wartość wskaźnika błędu wyjścia modelu zidentyfikowanego bez filtracji  $MSE$  i filtracją  $MLE_{D1}(q^{-3}, \alpha = 0.995)$ .

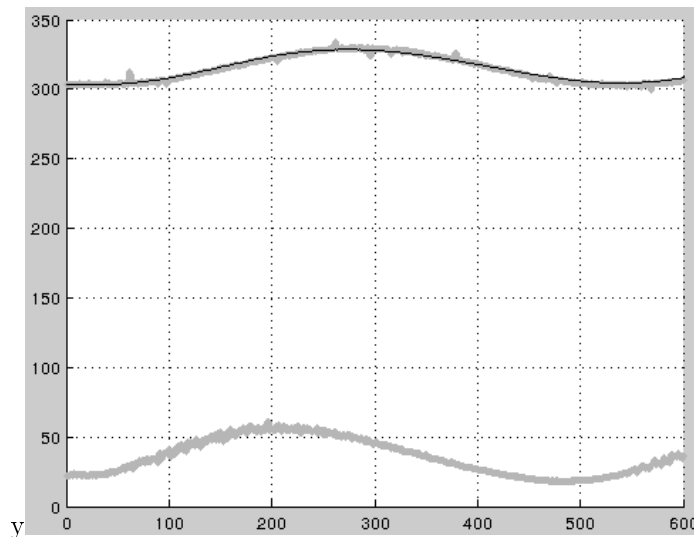
$MSE$	$MSE_{D1}$
57.7887	3.2573



Rysunek 83: Sygnał wejściowy i wyjściowy podsystemu kolumny destylacyjnej bez filtracji  $EX(y) = f(MLE(y))$  oraz odpowiedź modelu zidentyfikowanego.

## 7.7 Wnioski do filtracji adaptacyjnej

Prezentowany algorytm filtracji, w porównaniu z filtrami dolnoprzepustowymi i pasmowymi, zaburza dynamikę systemu ale wyniki filtracji pozwalają na uzyskanie akceptowalnych wartości wskaźnika jakości. Po filtracji sygnał zachowuje informacje o dynamice systemu, jak pokazano w przykładach. Dynamika sygnału po filtracji jest w nieznacznym stopniu zniekształcona, zniekształcenia mają charakter opóźnień zależnych od amplitudy. Algorytm może poprawnie działać na danych uzyskanych z pomiarów przy ograniczonej precyzji obliczeniowej. Zbliżone właściwości filtracji posiada Filtr Kalmana, wymaga jednak znajomości dokładnego modelu matematycznego systemu, dystrybucji zakłóceń oraz arbitralnego wprowadzenia inicjujących wartości początkowych. Porównanie zaproponowanych algorytmów filtracji i filtru Kalmana (Rys. 81) dla zakłóceń zawartych w prawie Gaussa o dużej wartości wariancji (Tabela 3) wykazało, że proponowane algorytmy charakteryzują się lepszymi wskaźnikami jakości. W przypadku zakłóceń o niskiej wariancji (Rys. 82) proponowane algorytmy charakteryzują się nieco gorszymi wskaźnikami jakości (Tabela: 3). Proponowany algorytm filtracji jest dobrze uwarunkowany matematycznie (110) [Soderstrom and Stoica (1989)], [Parzen and Cheng (1997)], szybko zbieżny, efektywny do zastosowań w klasycznych systemach komputerowych, odporny na zakłócenia. Algorytm jest autonomiczny, nie wymaga znajomości modelu matematycznego, parametrów rozkładu próbek, arbitralnej parametryzacji wartości początkowych. Nowatorskim rozwiązaniem w prezentowanym podejściu jest rekurencyjne wykorzystanie regresji liniowej LSE do autostrojania funkcji filtrującej, co pozwala na sklasyfikowanie przedstawionego algorytmu jako filtrów adaptacyjnych [Lindsten (2013)]. Estymacja wartości oczekiwanej pozwala zmierzyć wariancję szumu, która może być użyta do oceny zakłóceń zmiennej procesowej oraz wykrywania uszkodzeń pochodzących z wewnętrznej struktury systemu. Algorytm może być łatwo implementowany w systemach elektronicznych.



Rysunek 84: Sygnał wejściowy i wyjściowy podsystemu kolumny destylacyjnej z filtracją  $EX(y) = f(MLE_{D1}(y))$  oraz odpowiedź modelu zidentyfikowanego.

## 8 Implementacja w strukturach sterowania

### 8.1 Warstwowe struktury sterowania

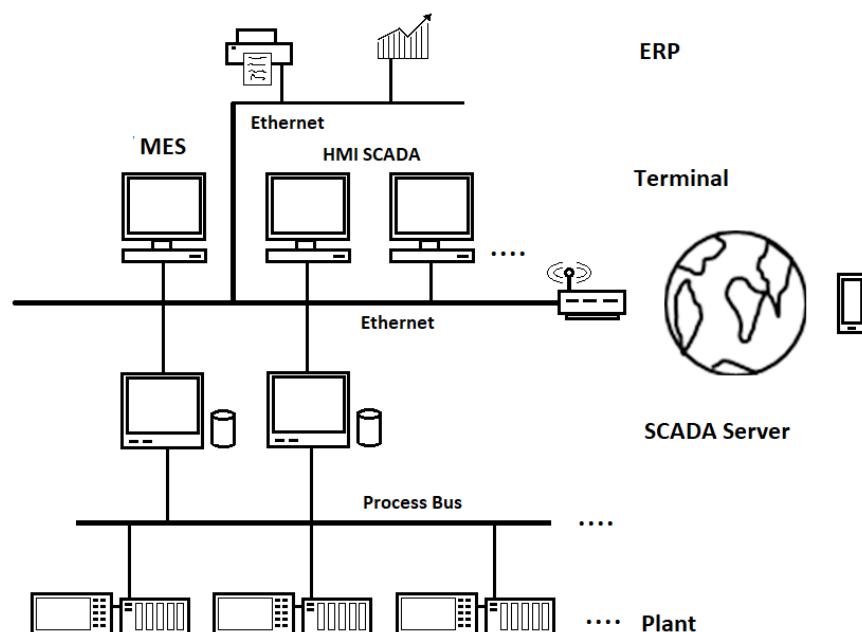
Warstwowe struktury sterowania wykorzystuje się do sterowania procesami technologicznymi, w których niezawodność sterowania oraz reakcja na zdarzenia niekorzystne jest czynnikiem determinującym. Wiąże się to z wysokimi kosztami systemów sterowania, które muszą spełniać odpowiednie normy. W warstwowych strukturach sterowania najczęściej spotyka się podział ze względu na czas realizacji zadań, pełnioną funkcję i niezawodność systemu. Ze względu na czas realizacji zadań wyróżnia się systemy:

1. Systemy czasu rzeczywistego o ostrych ograniczeniach czasowych stosowane w sterowaniu, przekroczenie czasu przeznaczanego na odpowiedź systemu prowadzi do zagrożeń dla personelu, uszkodzeń lub zniszczenia urządzeń HRT (ang. hard real-time). Wszystkie zadania muszą zostać wykonane w ściśle zadeklarowanym limicie czasu, np. w systemach procesowych PLC, PID, DCS, PCS do 100 [ms]. Po przekroczeniu limitu czasu generowana jest informacja o błędzie krytycznym, system przechodzi w stan nieaktywny, jeśli programista zadeklarował obłogę zdarzenia niekorzystnego może przypisać do wyjść wartości nadawane po dezaktywacji systemu, które zminimalizują skutki zdarzenia niekorzystnego. Informacja o błędzie krytycznym jest przekazywana do niezależnych systemów zabezpieczeń, których zadaniem jest sprowadzenie układu lub technologii do stanu bezpiecznego lub ograniczenie zjawisk niekorzystnych.
2. Systemy czasu rzeczywistego o miękkich lub łagodnych ograniczeniach czasowych SRT (ang. soft real-time) z prawdopodobieństwem wykonania zadań w zadeklarowanym czasie – przekroczenie pewnego czasu powoduje negatywne skutki tym poważniejsze, im bardziej ten czas został przekroczony; w tym przypadku przez negatywne skutki rozumie się spadek funkcji zysku aż do osiągnięcia wartości zero. W tej klasie znajdują się systemy operatorskie pracujące na komputerach klasy PC, panelach operatorskich, które wykorzystują środowisko systemów operacyjnych Windows, Linux, itp.

Ze względu na pełnioną funkcję wyróżnia się systemy:



1. Systemy sterowania bezpośredniego sterujące urządzeniami i technologiami, w których kryterium deterministycznym jest niezawodność pracy i pewność wykonania zadań w ściśle zadeklarowanym czasie. Warstwę sterowaną przez systemy sterowania bezpośredniego określa się nazwą „Plant”, najczęściej wykonywane są jako systemy o podwyższonej niezawodności działania.
2. Systemy operatorskie (ang. terminal), udostępniają operatorowi interfejs graficzny umożliwiający sterowanie procesem poprzez symboliczne odwzorowanie stanu procesu i wyświetlenie numeryczne wartości pomiarowych, wymieniają dane pomiędzy systemami sterowania bezpośredniego a bazą RTDB (ang. real-time database) monitoringu procesu, do której odwołują się obiekty interfejsu graficznego operatora oraz obiekty obsługujące archiwizację pomiarów, alarmy i zdarzenia. Umożliwiają operatorowi wstępną analizę parametrów procesu za pomocą wykresów i raportów, generują informacje alarmowe [Latocha (2011a)], [Latocha (2014)].



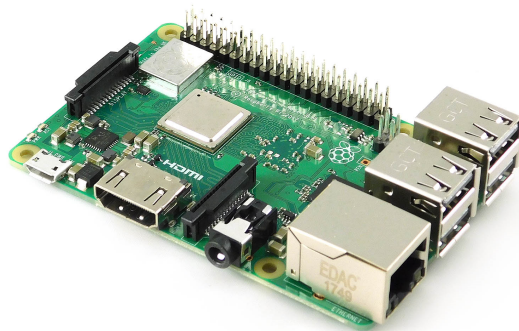
Rysunek 85: Struktura sprzętowa klasycznego systemu sterowania warstwowego.

W aplikacjach i technologiach wymagających bezwzględnie niezawodnej i bezawaryjnej pracy stosuje się nadmiarowość systemów sterowania powszechnie nazywaną redundancją. Redundancja polega na tym, że kilka niezależnych systemów nadzoruje proces, który jest sterowany przez jeden system, pozostałe systemy pozostają w trybie pracy nazwanym czuwaniem (ang. standby mode). Po zdiagnozowaniu błędów aktywnego systemu sterowania przechodzi on w stan dezaktywacji z komunikatem diagnostycznym o awarii. Zadanie sterowania przejmuje system, który pozostawał w stanie czuwania, zmienia status na aktywny.

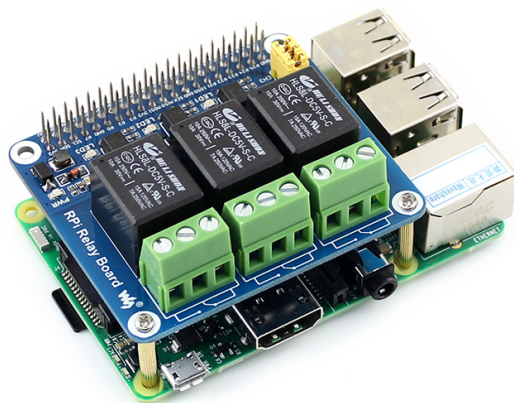
## 8.2 Systemy sterowania w technologii embedded

Do sterowania maszyn, sprzętu AGD oraz autonomicznego sterowania lokalnego, często wykorzystuje się systemy wbudowane. System wbudowany (ang. embedded system) – komputerowy system

specjalnego przeznaczenia, który staje się integralną częścią obsługiwanego przez niego sprzętu komputerowego (hardware). System wbudowany musi spełniać określone wymagania ściśle zdefiniowane do zadań, które ma wykonywać. Każdy system wbudowany oparty jest na procesorze lub mikrokontrolerze zaprogramowanym do wykonywania ograniczonej liczby zadań. Zależnie od przeznaczenia może zawierać oprogramowanie dedykowane jedynie temu urządzeniu (firmware) lub system operacyjny wraz ze specjalizowanym oprogramowaniem [Latocha (2015)]. Zwykle decyduje o tym stopień niezawodności, jaki ma oferować dany system wbudowany. Ogólną zasadą jest, że im mniej złożone i specjalizowane jest oprogramowanie, tym bardziej system jest niezawodny i pozwala szybciej reagować na zdarzenia.



Rysunek 86: System wbudowany.



Rysunek 87: Moduły rozszerzające do systemu wbudowanego.

Niezawodność systemu wbudowanego może być zwiększona poprzez rozdzielanie zadań na mniejsze podsystemy oraz redundancję oraz zastosowanie podsystemu elektroniczno-programowego do obsługi zdarzeń niekorzystnych. Uszkodzenie, zatrzymanie pracy procesora lub zakłócenia w pracy procesora nie powodują wystawienia przypadkowej sekwencji sygnałów sterujących na porty. Po wykryciu przez układ elektroniczno-programowy zaburzeń w pracy procesora układ separuje sygnały wychodzące z procesora, zastępując je domyślnym stanem niskim lub dedykowaną kombinacją wartości, która wysteruje system do stanu bezpiecznego lub zminimalizuje oddziaływanie zjawisk niekorzystnych. Zwiększenie niezawodności w systemach wbudowanych można uzyskać poprzez zastosowanie do jednego zadania dwóch identycznych urządzeń, z których jedno przejmuje zadania drugiego w przypadku jego awarii. Obecnie systemy wbudowane znajdują zastosowanie praktycznie we wszystkich dziedzinach, gdyż ogólnie dąży się do tego, aby wszystkie urządzenia były tzw.

„inteligentne” i zdolne do pracy autonomicznej, a także mogły wykonywać coraz to bardziej złożone zadania.

Przykłady obszarów i urządzeń technicznych, w których stosuje się systemy wbudowane:

- układy sterujące pracą silnika samochodowego i ABS, komputery pokładowe;
- sprzęt sterujący samolotami, raketami, pociskami raketowymi, inteligentnymi bombami;
- sprzęt medyczny, w tym m.in. monitory holterowskie;
- sprzęt pomiarowy, w tym m.in. oscyloskopy, analizatory widma; bankomaty i podobne urządzenia ATM;
- termostaty, klimatyzatory; kuchenki mikrofalowe, zmywarki;
- sterowniki PLC stosowane w przemyśle do sterowania, kontroli procesów i maszyn produkcyjnych;
- sterowniki do wszelkiego rodzaju robotów mechanicznych;
- systemy alarmowe służące do ochrony osób i mienia, np. antywłamaniowe, przeciwpożarowe i inne;
- telefony komórkowe i centrale telefoniczne;
- drukarki, kserokopiarki;
- kalkulatory;
- sprzęt komputerowy, w tym między innymi: dyski twarde, napędy optyczne, routery, serwery czasu i firewalle;
- systemy rozrywki multimedialnej i interaktywnej: konsole do gier, stacjonarne i mobilne; automaty do gier oraz o innym zastosowaniu; telewizory, odtwarzacze DVD, kamery cyfrowe, magnetowidy, set-top boxy.

---

## 9 Wnioski

Na podstawie badań zamieszczonych w pracy wykonano syntezę algorytmu linearyzacji oraz analizę wpływu zaproponowanej modyfikacji algorytmu optymalizacji najmniejszych kwadratów błędu równania na wynik linearyzacji. Przeanalizowano wpływ współczynników korekcji obserwatora na wskaźniki jakości sterowania liniowo-kwadratowego. Przedstawiono algorytmy obliczeniowe linearyzacji modeli nieliniowych i silnie nieliniowych na przedziale dla niezerowych warunków początkowych i zakłóceń symetrycznych o rozkładzie Gaussa. Przeprowadzone badania pozwoliły obliczyć suboptymalne macierze uśrednionego obserwatora linearyzującego o wysokim wzmocnieniu z wykorzystaniem algorytmu Ackermanna, lokowania biegunów układu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego poprzez lokowanie wartości własnych macierzy obserwatora (286), (152), [Kailath (1980)] dla pewnych klas systemów nieliniowych. Zastosowanie algorytmu Ackermanna w optymalizacji macierzy wzmocnienia obserwatora pozwalana na wprowadzenie współczynników korekcji statycznej  $\beta$  oraz dynamicznej  $\tau_{cr}$  stałych czasowych macierzy modelu zlinearyzowanego (137), (138), (139). Zakładając, że wartości własne obserwatora pozostają stałe  $\lambda$  wprowadzając korekcje  $\beta$ , która zmienia wartość sygnału sterującego wprowadzonego do równania obserwatora aby bieguny układu zamkniętego pozostały nie zmienione zmienić się musi wartość macierzy wzmocnienia obserwatora, analogicznie modyfikując stałe czasowe w macierzy modelu zlinearyzowanego współczynnikiem korekcji dynamicznej  $\tau_{cr}$ , aby bieguny układu zamkniętego pozostały nie zmienione, we wzorze Ackermanna zmianie ulega wartość macierzy wzmocnienia obserwatora. Współczynnik korekcji  $\tau_{cr}$  modelu zlinearyzowanego zmienia wartość macierzy wzmocnienia regulatora LQR. Przedstawione w pracy wyniki potwierdziły tezy rozprawy (Teza 1) o możliwości zbudowania uśredniająco-linearyzującego obserwatora dynamicznego w pętli linearyzującego sprzężenia zwrotnego regulatora LQR dla zadania sterowania systemów nieliniowych i silnie nieliniowych. W pracy wykazano możliwość zastosowania regulatorów liniowo kwadratowych w sterowaniu systemów nieliniowych i silnie nieliniowych, nieróżniczkowalnych w klasycznym sensie, których wewnętrzna struktura nie jest znana, przy założeniu że spełniają warunek sterowności BIBO. W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że w sterowaniu prezentowanych klas systemów nieliniowych z wykorzystaniem obserwatorów (198), (199) wymagany jest odpowiedni dobór wartości własnych i macierzy obserwatora. Praca ma charakter stosowany do zastosowań w klasycznych systemach sterowania, w których błąd toru pomiarowego wynosi 0.01-1% zakresu, oddziaływanie zjawisk mechaniki kwantowej jest pomijalne. Badania i obliczenia przeprowadzono dla warunku optymalizacji liniowo-kwadratowej na nieskończonym horyzoncie, co pozwoliło uprościć równania Riccatiego do postaci algebraicznej. W przeprowadzonych eksperymentach błąd obliczeń numerycznych osiągał zakres  $10^{-6}$  do  $10^{-3}$  zakresu pomiarowego wielkości fizycznej, jest znacząco mniejszy od błędu klasycznego toru pomiarowego, co pozwala uznać, że jego wpływ na wyniki jest pomijalny. Stosując proponowane algorytmy obliczeniowe w systemach elektroniki i technologii kosmicznych wymienione wartości błędów obliczeń są istotne, należy rozważyć obliczenia na skończonym horyzoncie. Tezy pracy zostały zweryfikowane na fizycznym modelu laboratoryjnym lewitacji magnetycznej. Eksperymentalnie potwierdzono możliwość implementacji proponowanych algorytmów w systemach fizycznych czasu rzeczywistego. Postawiona teza rozprawy (Teza 2) o możliwości projektowania regulatorów LQR dla systemów nieliniowych i silnie nieliniowych czasu rzeczywistego została udowodniona. W eksperymencie na stanowisku badawczym lewitacji magnetycznej potwierdzono optymalność sterowania regulatorem LQR (259) w relacji do sterowania klasycznego PID. Zastosowanie linearyzacji ARMAX poprzez rzutowanie lokalnego modelu dynamiki systemu nieliniowego w otoczeniu punktu referencyjnego na model liniowy oraz użycie asymptotycznego obserwatora liniowego łączy zalety asymptotycznego odtwarzania stanu oraz zaletę filtracji zakłóceń. Z teorii filtracji Kalmana, pracy [Khalil (2015)] oraz wyników badań eksperymentalnych przeprowadzonych w rozprawie doktorskiej nasuwa się wniosek, że w zagad-

nieniach sterowania liniowo-kwadratowego zwiększanie dokładności odtwarzania stanu [Baranowski et al. (2017)] jest istotne, ale nie rozwiązuje problemu dokładności i stabilności regulacji LQR. W pracy nie rozpatrywano zagadnień rozszerzonego Filtru Kalmana dla omawianych systemów silnie nieliniowych ze względu na potwierdzone wnioski zawarte w uznanych publikacjach [Ljung (1979)] o niestabilności algorytmu EKF w systemach, które nie spełniają warunku Lipschitza, część badań przeprowadzono na systemach, które nie są różniczkowalne w klasycznym sensie. Badania przeprowadzone w pracy dla wielu klas modeli nieliniowych oraz analiza wpływu współczynników korekcji  $\beta$  i  $\tau_{cr}$  na wzmocnienie obserwatora i stabilność układu sterowania LQR umożliwiły sformułowanie uogólnionego kryterium badania lokalnej sterowalności systemów nieliniowych. Jeśli istnieje  $\hat{K}$  oraz estymator (198) lub (199) dla prawa sterowania (216), to istnieje wysokie prawdopodobieństwo że system nieliniowy jest lokalnie sterowalny [Sussmann and Jurdjevic (1972)]. Na podstawie badań przeprowadzonych w pracy nasuwa się wniosek że optymalizację projektowania układów regulacji liniowo-kwadratowej z linearyzującą pętlą sprzężenia zwrotnego dla systemów nieliniowych i silnie nieliniowych należy przeprowadzić poprzez nadanie priorytetów kolejności. W pierwszej kolejności należy wykonać optymalizację linearyzacji (136). Dla optymalnego modelu zlinearyzowanego należy przeprowadzić optymalizację korekcji wzmocnienia obserwatora (199) oraz macierzy wzmocnienia regulatora LQR (216). Algorytmy zaproponowane w pracy mogą być stosowane w systemach sterowania czasu rzeczywistego: PLC, PC, mikroprocesory, systemy wbudowane.

## 9.1 Wnioski dotyczące sterowania systemami nieliniowymi i silnie nieliniowymi

Linearyzacja z wykorzystaniem stycznych przy minimalnej segmentacji punktów daje optymalne estymatory w punkcie linearyzacji. W przypadku układów silnie-nieliniowych minimalna segmentacja punktów nie gwarantuje spełnienia warunku Lipschitza (76), estymator EKF bazujący na linearyzacji z wykorzystaniem stycznych jest silnie obciążony. Dla obciążonego estymatora EKF obliczenie sterowań a priori nie gwarantuje spełnienia warunku sterowalności a posteriori. Zaproponowany w pracy algorytm uśrednia dynamikę obserwatora. System nieliniowy można linearyzować za pomocą proponowanego algorytmu lokalnie na przedziale w dowolnym stanie, który spełnia warunek sterowalności BIBO. Modele deterministyczne można opisać za pomocą równań różniczkowych nieskończenie wymiarowych. Skończenie wymiarowe równania opisujące modele fizyczne, zwykle uwzględniają dominujące zmienne stanu, pomijają oddziaływania słabe. Jest to jeden z powodów powstawania nieakceptowalnych błędów w obliczeniach EKF i regulatora LQG. W proponowanej linearyzacji można zastosować model dowolnego rzędu, modele wysokich rzędów pozwalają na dokładną estymację dynamiki systemu nieliniowego. Przedstawiony algorytm uogólnia zadanie linearyzacji dla układów nieliniowych, nie wymaga rozwiązywania równań różniczkowych. Jak wykazano w pracy, dokładne i powtarzalne rozwiązania w inżynierii systemów sterowania można uzyskać za pomocą regresji liniowej modelami skończenie wymiarowymi. Podsumowując, w pracy przedstawiono nowy algorytm linearyzacji dla systemów nieliniowych i silnie nieliniowych, który może być stosowany również w układach mechanicznych, opisanych funkcjami nieciągłymi, nieróżniczkowalnymi.

## 9.2 Nowatorskie elementy pracy

- Nowatorskim osiągnięciem pracy jest zaproponowanie nowego podejścia do linearyzacji systemów nieliniowych i silnie nieliniowych poprzez projekcję modelu dynamiki systemu nieliniowego lokalnie w otoczeniu punktu referencyjnego na model liniowy filtru impulsowego o nieskończonej odpowiedzi poprzez zastosowanie zmodyfikowanego algorytmu estymacji najmniejszych kwadratów [Latocha (2018a)], [Latocha (2017)].
- W pracy potwierdzono oraz zweryfikowano tezę postawioną przez [Khalil (2015)] dotyczącą

korekcyjnych własności obserwatorów o wysokim wzmocnieniu dla systemów niepewnych i nieliniowych oraz ich stabilności w układzie sterowania LQR (Rys. 17).

- Nowatorskim osiągnięciem pracy jest zaproponowanie uogólnionych algorytmów obliczenia obserwatorów liniowych o wysokim wzmocnieniu i korekcji regulatora LQR w układzie sterowania (Rys. 17) dla wielu klas systemów nieliniowych, silnie nieliniowych i niepewnych SISO poprzez zastosowanie dodatkowych warunków parametryzowanych za pomocą skalarów [Einicke and White (1999)]. Podejście zaproponowane w pracy pozwoliło na sformułowanie zadania optymalizacji wypukłej na przedziale dla pewnych klas systemów nieliniowych.
- W pracy przedstawiono algorytm budowy regulatora  $u(t) = K\hat{y}(t)$  [Mitkowski (2016)] dla systemów nieliniowych.

### 9.3 Najważniejsze oryginalne wyniki pracy wnoszące istotne, nowe treści do rozwoju nauki

- Najważniejszym oryginalnym wynikiem pracy jest potwierdzenie założeń zawartych w tezach oraz weryfikacja proponowanych algorytmów obliczeniowych na modelach matematycznych i fizycznym systemie, laboratoryjnym stanowisku lewitacji magnetycznej w układzie sterowania LQR z obserwatorem linearyzująco-uśredniającym o wysokim wzmocnieniu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego.
- W pracy wykazano, że dokładna estymacja stanu jest ważna w sterowaniu LQR systemami nieliniowymi, silnie nieliniowymi ale nie jest kluczowa; kluczowe znaczenie ma trend estymat stanu, który w pracy formowany jest obserwatorem o wysokim wzmocnieniu dla zmodyfikowanego regulatora LQR.
- Wyniki pracy dowodzą, że warunkiem koniecznym sterowania fizycznych systemów dynamicznych (12) jest spełnienie równania na prawo sterowania (18), które zakłada dostęp do pełnej informacji o stanie obiektu (11) oraz spełnienie warunku sterowności (9). Opis systemów fizycznych podlega ograniczeniom, które odnoszą się do reprezentacji na skończonej ilości danych uzyskanych z pomiarów, dokładności sensorów oraz urządzeń wykonawczych, zakłóceń oraz błędów numerycznych. Powyższe ograniczenia sprawiają, że mamy dostęp do niepełnej informacji o stanie systemu. W pracy wykazano, że możliwa jest estymacja informacji o stanie systemu nieliniowego, silnie nieliniowego funkcją skończonego wymiarową z akceptowalnym poziomem błędów (198), (199) w zadaniu sterowania LQR.
- W pracy wykazano, że regresja liniowa pozwala na obliczenie estymat systemów fizycznych z wysoką precyzją, umożliwiającą zastosowanie regulatora LQR.
- Nowatorskim osiągnięciem pracy jest modyfikacja algorytmu optymalizacji najmniejszych kwadratów błędów równania, która pozwala na zastosowanie dla danych dyskretnych, których wartości na początku przedziału są niezerowe, sprowadzając rozwiązanie do klasycznego problemu LSE.
- Ważnymi wynikami pracy są uogólnione algorytmy obliczeniowe, które umożliwiają wyliczenie obserwatora linearyzującego o wysokim wzmocnieniu oraz regulatora LQR w zadaniu stabilizacji i trackingu dla różnych klas nieliniowości.
- Algorytm obliczenia obserwatora linearyzująco-uśredniającego o wysokim wzmocnieniu HG (198), (199) w układzie regulacji LQR, w którym poprzez uwarunkowanie wartości macierzy

obserwatora i wzmocnienia regulatora od współczynników korekcyjnych zadanie optymalizacji sprowadzono do zadania optymalizacji wypukłej na przedziale dla pewnych klas systemów nieliniowych.

- W eksperymentach na stanowisku badawczym lewitacji magnetycznej stwierdzono empirycznie, że warstwa sprzętowa umożliwiła obliczenia w systemie Matlab/Simulink RT z krokiem solvera 0.001[s]. Zmiana kroku solvera na 0.01[s] destabilizuje system, co nasuwa wniosek, że implementację zaproponowanych algorytmów można zrealizować w mikrokontrolerach, które umożliwiają wykonanie kodu poniżej 0.001[s].
- Proponowany system regulacji posiada właściwości filtrowania zakłóceń ze względu na wykorzystanie modelu filtru impulsowego ARMAX jako funkcji bazowej LSE w algorytmie linearyzacji.
- Z eksperymentów przeprowadzonych na modelach matematycznych reprezentujących różne klasy nieliniowości oraz niepewność systemu nasuwa się wniosek, że sterowalność systemów nieliniowych oraz niepewnych nie jest zdeterminowana istnieniem wzmocnienia  $K$  regulatora LQR od stanu, dla prawa sterowania (18) w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego. Może nie istnieć  $K$  które spełni prawo sterowania (18) dla systemu nieliniowego, pomimo tego system nieliniowy może być sterowalny poprzez zastosowanie obserwatora o wysokim wzmocnieniu w pętli sprzężenia zwrotnego układu regulacji LQR ze skorygowaną wartością wzmocnienia regulatora. Wniosek został potwierdzony empirycznie na modelach matematycznych oraz na fizycznym stanowisku lewitacji magnetycznej.
- Proponowany algorytm sterowania zalicza się do klasy sterowań gładkich (325), [Lachowicz (2012)], niezmiennających się nagle (ang. Smooth Controls)  $U_\varepsilon$ :

$$u \in U_\varepsilon[0, t_1] \quad (324)$$

jeżeli  $u(t)$  jest ciągła na  $[0, t_1]$ ,  $u(0) = u(1)$  oraz  $|\dot{u}(t)| \leq \varepsilon$  na  $[0, t_1]$ ;

$$U_\varepsilon = \bigcup_{t_1 > 0} U_\varepsilon[0, t_1] \quad (325)$$

W pracy wykazano że sterowanie gładkie (325) pozwala na uzyskanie lepszych wskaźników jakości od sterowań kawałkami stałych (327), [Lachowicz (2012)], wykorzystywanych w algorytmie EKF, (ang. Piecewise Controls)  $U_{PC}$ :

$$u \in U_{PC}[0, t_1] \quad (326)$$

jeżeli  $u(t)$  jest kawałkami stała na  $[0, t_1]$ , tzn. istnieją odcinki  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_l = t_1$ , takie że  $u(t)$  jest stała na każdym przedziale  $[s_{k-1}, s_k]$

$$U_{PC} = \bigcup_{t_1 > 0} U_{PC}[0, t_1]. \quad (327)$$

- W pracy wykazano (Rozdział 7), (Tabela 3), [Latocha (2013)], że dla zakłóceń o dużej wartości kowariancji filtry oparte na estymacji jądrowej dają lepsze wskaźniki jakości oszacowania wartości oczekiwanej od filtru Kalmana, który jest optymalnym estymatorem względem prawdopodobieństwa dla rozkładu Gaussa.
- W XX wieku pojawiło się pojęcie bezpiecznej integracji systemów automatyki (ang. Safety Integrated), które dzisiaj jest głównym kryterium budowy i rozwoju systemów sterowania. Prezentowany algorytm sterowania systemami nieliniowymi ze względu na szybkość i stabilność obliczeń można zaliczyć do algorytmów Safety Integrated.

## 9.4 Proponowane kierunki badawcze

Otwartą problematyką badawczą zaproponowanych w pracy rozwiązań pozostają kierunki:

- Analitycznego rozwiązania problemu optymalizacji obserwatora o wysokim wzmocnieniu.
- Optymalizacji wielokryterialnej [Korytowski (2016)] proponowanych algorytmów obliczeniowych.
- Badanie stabilności i warunków brzegowych [Grabowski (2017)], [Duda (2017)].
- Badanie własności filtrujących i korekcyjnych proponowanego modelu linearyzacji (136) oraz obserwatora HG (199).
- Wykorzystanie optymalizacji minimalno-wariacyjnej Kalmana, filtrów adaptacyjnych (Rozdział 7) lub filtrów ułamkowego rzędu [Baranowski et al. (2017)].
- Badanie zastosowań w systemach nieliniowych [Pilat (2010)].
- Przeprowadzenie dowodu matematycznego na zbieżność estymatora (Rozdział 4.2.7) i obserwatorów HG (198), (199).
- Implementacja dla systemów wielowymiarowych MIMO (ang. Multiple Input, Multiple Output).
- Regresja liniowa, poszukiwanie funkcji bazowych, które pozwolą na estymację modeli matematycznych w dziedzinie czasu ciągłego z dyskretnych danych pomiarowych.

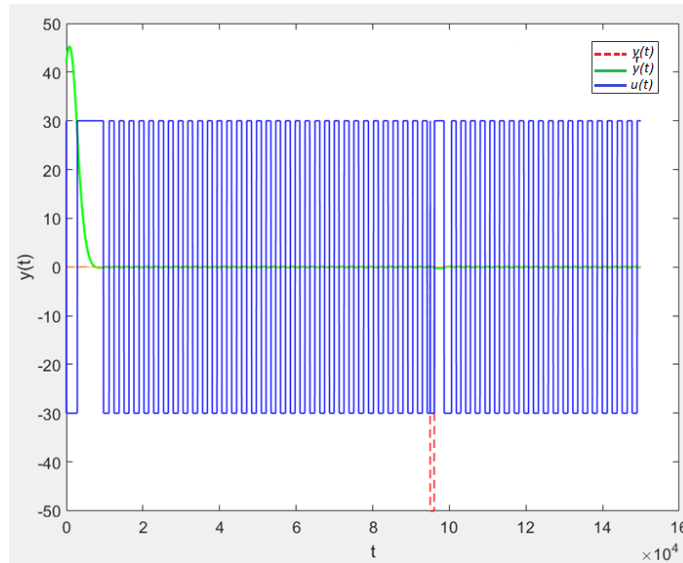


## 10 Dodatek A

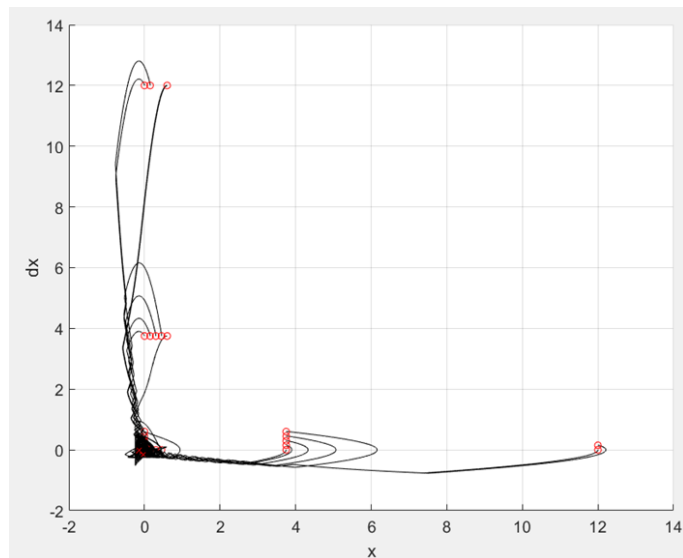
Modele matematyczne wykorzystane do weryfikacji algorytmów zawartych w pracy.

- Sterowanie ślizgowe - sprężyna sterowana dwustanowo PWM (ang. Pulse-Width Modulation)

$$\ddot{x} + 0.01\dot{x} + x + x^2 = 30\text{sgn}(u). \quad (328)$$



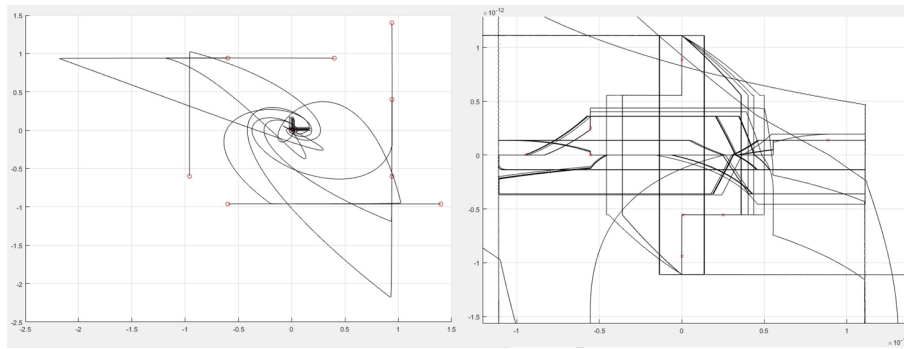
Rysunek 88: Stabilizacja systemu (328) dla niezerowych warunków początkowych.



Rysunek 89: Trajektorie fazowe w zadaniu stabilizacji LQR systemu opisanego równaniem (328).

- System chaotyczny [Sprott and Linz (2000)]

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + \dot{x} - \text{sgn}(x) + x = u. \quad (329)$$



Rysunek 90: Trajektorie fazowe w zadaniu stabilizacji LQR systemu chaotycznego opisanego równaniem algebraicznym (329).

## Literatura

- Ahmed, N. U. (1977). Optimal Control of a Class of Strongly Nonlinear Parabolic Systems, *Journal of Mathematical Analysis And Applications* **61**(1): 188–207.
- Andrieu, V., Prieur, C., Tarbouriech, S. and Zaccarian, L. (2016). A hybrid scheme for reducing peaking in high-gain observers for a class of nonlinear systems, *Automatica* **72**: 138–146.
- Assche, V., Ahmed-Ali, T., Hann, C. and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2011). High gain observer design for nonlinear systems with time varying delayed measurements, *IFAC Proceedings Volumes* **44**: 692–696.
- Astolfi, D. and Marconi, L. (2015). A High-Gain Nonlinear Observer With Limited Gain Power, *Journal of Mathematical Analysis And Applications* **60**: 3059–3064.
- Bania, P. and Baranowski, J. (2016). Field Kalman filter and its approximation, *IEEE 55th Conference on Decision and Control*, pp. 2875–2880.
- Baranowski, J., Pauluk, M. and Tutaj, A. (2017). Analog realization of fractional filters: Laguerre approximation approach, *AEU-International Journal of Electronics and Communications* **81**: 1–11.
- Bronsztejn, I., Siemiendiajew, K., Musiol, G. and Muhlig, H. (2007). *Compendium of Modern Mathematics*, Warszawa PWN.
- Browder, F. E. (1964). Strongly Non-Linear Parabolic Boundary Value Problems, *American Journal of Mathematics* **86**(2): 339–357.
- Bucy, R. and Joseph, P. (1968). *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*, AMS Chelsea Publ.
- Byrski, W. (2007). *Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych*, Vol. 58 of *Monografie, Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne AGH*.
- Cho, S., Gao, Z. and Moan, T. (2018). Model-based fault detection, fault isolation and fault-tolerant control of a blade pitch system in floating wind turbines, *Renewable Energy* **120**: 306–321.  
**URL:** <https://doi.org/10.1016/j.renene.2017.12.102>
- Conway, J. B. (1990). *A course in functional analysis*, New York: Springer-Verlag, p. 67.
- Corn, J. M. (2007). *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society.
- Curtain, R. F., Zwart, H. and Iftime, O. V. (2017). A Kleinman Newton construction of the maximal solution of the infinite dimensional control Riccati equation, *Automatica* **86**: 147–153.
- Ding, F. and Chen, T. (2005). Identification of Hammerstein nonlinear ARMAX systems, *Automatica* **41**: 1479–1489.
- Diversi, R., Guidorzi, R. and Soverini, U. (2011). Identification of ARMAX models with noisy input and output, *Preprints of the 18th IFAC World Congress* p. 11.
- Duda, J. (2017). Lyapunov matrices approach to the parametric optimization of a neutral system with two delays, *Mathematics and Computers in Simulation* **136**: 22–35.

- Einicke, G. A. and White, L. B. (1999). Robust extended Kalman filtering, *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(9): 2596–2599.
- Elliott, R. and Vikram, K. (1997). Exact finite-dimensional filters for maximum likelihood parameter estimation of continuous-time linear Gaussian systems, *Siam j. Control optim* **35**(6): 1908–1923.
- Figwer, J. (2009). Continuous-Time Dynamic System Identification with Multisine Random Excitation Revisited, *IFAC Proceedings Volumes* **42**(13): 296–301.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. and Workman, M. L. (1990). *Digital Control of Dynamic Systems*, second edition edn, Addison-Wesley.
- Grabowski, P. (2011). Lur’e feedback systems with both unbounded control and observation well-posedness and stability using nonlinear semigroups, *Nonlinear Analysis* **74**(10): 3065–3085.
- Grabowski, P. (2013). Absolute stability criteria for infinite-dimensional discrete Lur’e systems with application to loaded distortionless electric RLCG-transmission line, *Journal of Difference Equations and Applications* **19**(2): 304–331.
- Grabowski, P. (2017). The LQ/KYP problem for infinite-dimensional systems, *Opuscula Mathematica* **37**(1): 63–64.
- Hannan, E. and Deistler, M. (1988). *The statistical theory of linear systems*, Probability and mathematical statistics, Wiley.
- Hannan, E. J. (1970). *Multiple time series. Wiley series in probability and mathematical statistics.*, Vol. 69 of *Wiley Series in Probability and Statistics*, Wiley.
- He, X., Wang, Z., Liu, Y. and Zhou, D. (2013). Least-squares fault detection and diagnosis for networked sensing systems using a direct state estimation approach, *IEEE Transactions on Industrial Informatics* **9**(3): 1970–1679.
- Huang, G. P., Mourikis, A. I. and Roumeliotis, S. I. (2008). Analysis and improvement of the consistency of extended Kalman filter based SLAM, *IEEE Journal of Robotics and Automation* pp. 473–479. ICRA 2008. IEEE International Conference.
- Isermann, R. (2005). Model based fault-detection and diagnosis-status and applications, *Annual Reviews in Control Elsevier* **29**: 71–85.
- Jazwinski, A. H. (1970). *Stochastic processes and filtering theory*, 2nd edition edn, Academic Press New York.
- Jiang, T., Khorasani, K. and Tafazoli, S. (2008). Parameter Estimation-Based Fault Detection, Isolation and Recovery for Nonlinear Satellite Models, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **16**(4): 799–808.
- Julier, S. J. and Uhlmann, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation, *Proceedings of the IEEE* **92**(3): 401–422.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice-Hall, Inc, p. 201.
- Keesman, K. (2011). *System Identification. An Introduction.*, Springer-Verlag London Limited, New Jersey 07458. Second Edition.

- Khalil, H. and Hassan, K. (2017). High-Gain Observers In Feedback Control Application To Permanent Magnet Synchronous Motors, *IEEE Control Systems Magazine* **37**(3): 25–41.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, Inc, New Jersey 07458. Second Edition.
- Khalil, H. K. (2015). *Nonlinear Control*, Pearson Education Limited Edinburgh. Global Edition.
- Klamka, J. (2002). Controllability of Nonlinear Discrete Systems, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **12**(2): 173–180.
- Klamka, J. (2011). Stan badan w zakresie teorii sterowania, *PAK* **61**: 188–207.
- Klamka, J., Czornik, A. and Niezabitowski, M. (2013). Stability and controllability of switched systems, *Bulletin of The Polish Academy of Sciences* **61**(3).
- Klamka, J., Czornik, A., Niezabitowski, M. and Babiarz, A. (2015). *Trajectory Controllability of Semilinear Systems with Delay*, Vol. 9011, ACIIDS, chapter Intelligent Information and Database Systems.
- Korytowski, A. (2016). *Advances in mathematical modeling, optimization and optimal control*, 16th French-German-Polish conference on Optimization, Springer, chapter Optimization and Its Applications, pp. 147–153.
- Kremer, A. J. and Respondek, W. (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics, *SIAM Journal on Control and Optimization* **23**(2): 197–216.
- Lachowicz, M. A. (2012). Teoria sterowania, *Uniwersytet Warszawski*.  
**URL:** <http://www.mimuw.edu.pl/lachowic>
- Landau, I. D. and Karimi, A. (1999). A Recursive Algorithm For ARMAX Model Identification In Closed Loop, *IEEE Transactions On Automatic Control* **44**(4): 840–843.
- Latocha, A. (1998). System sterowania procesami silnie nieliniowymi, *Pomiary Automatyka Robotyka* (9): 50–51. Skamer-ACM.
- Latocha, A. (2011a). *The use of data exchange standard OPC DA, OPC DX layered control systems to implement non-standard task automation through integration PLC with advanced software*, Kielce Politechnika Swietokrzyska, chapter Postepy automatyki i robotyki Cz.1. KKA 2011, pp. 182–204.
- Latocha, A. (2011b). The use of static optimization to build mathematical models of complex dynamic systems, *Pomiary Automatyka Robotyka* (12): 60–63.
- Latocha, A. (2013). *Optimal discrete-time finite-dimensional inertial filters*, Vol. book of abstracts, AGH University of Science and Technology, chapter 6th French-German-Polish conference on Optimization, pp. 83–84.
- Latocha, A. (2014). *Implementation of mathematical models of complex dynamical systems in the new generation of SCADA systems*, Warszawa Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT 2014, chapter Aktualne problemy automatyki i robotyki. KKA 2014, pp. 382–391.
- Latocha, A. (2015). Projekt konkursowy "zenon Challenge 2014" wykonany przez AGH, EAIiB, AiR, *AutomatykaB2B*.  
**URL:** <https://automatykab2b.pl/technika/8051-projekt-konkursowy-qzenon-challenge-2014q-wykonany-przez-agh-eaiib-air>

- Latocha, A. (2016). *Adaptive optimal control for nonlinear systems*, Fundacja Krakow Miastem Startupow, chapter ksiazka abstraktow, p. 5.
- Latocha, A. (2017). A robust linear-quadratic moving averaging controller for strongly nonlinear systems, in P. Ostalczyk (ed.), *NDC 2017 international conference on Nonlinear Dynamics and Complexity*, Lodz University of Technology, pp. 1–9. post conference materials.
- Latocha, A. (2018a). *Fast and robust online dynamic system identification*, Vol. 635, Springer, chapter Advances in Intelligent Systems and Computing, pp. 215–228.
- Latocha, A. (2018b). Robust fault detection, location, and recovery of damaged data using linear regression and mathematical models, *IFAC-PapersOnLine* **51**(24): 300–306.
- Lewis, F. (1986). *Optimal Estimation*, Vol. Second Edition, John Wiley & Sons.
- Lindsten, F. (2013). *Particle filters and Markov chains for learning of dynamical systems*, number 1530, Printed by LiU-Tryck.
- Lions, J. L. (1965). Sur certaines equations paraboliques non lineaires, *Bulletin de la Societe Mathematique de France* **93**: 155–175.
- Ljung, L. (1979). Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **24**(1).
- Lurie, B. and Enright, P. (1986). *Classical Feedback Control*, NY Marcel Dekker.
- Mitkowski, W. (1984). *Stabilizacja systemow dynamicznych*, Skrypty Uczelniane Akademia Gorniczo-Hutnicza im. Stanislawia Staszica, AGH.
- Mitkowski, W. (2016). Kierunki rozwoju podstaw teorii sterowania, *Referat w ramach seminariow organizowanych przez Polskie Towarzystwo Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej, Oddzial w Krakowie* p. 45.
- Morari, M. and Zafiriou, E. (1989). *Robust Process Control*, Vol. 10 of *Monografie*, Prince Hall.
- Odgaard, P. F., Sanchez, H., Escobet, T. and Puig, V. (2015). Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control with Application on a Wind Turbine Low Speed Shaft Encoder. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFEPROCESS 2015, *IFAC PapersOnLine* **48**(21): 1357–1362.
- Oprzedkiewicz, K., Mitkowski, W. and Gawin, E. (2017). *Automation 2017 innovations in automation, robotics and measurment techniques*, Vol. 550, Springer International Publishing, chapter Advances in Intelligent Systems and Computing, pp. 32–33.
- Parzen, E. (1962). On Estimation of a Probability Density Function and Mode, *Annals of Mathematical Statistics* **33**(Issue 3 (1962)): 1065–1076.
- Parzen, E. and Cheng, C. (1997). Unified estimators of smooth quantile and quantile density functions, *Journal of Statistical Planning and Inference* **59**: 291–307.
- Pilat, A. (2010). Analytical modeling of active magnetic bearing geometry, *Applied Mathematical Modelling* **34**: 3805–3816.

- Robenack, K. (2004). Optimal Control of a Class of Strongly Nonlinear Parabolic Systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **127**: 160–162.
- Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function, *The Annals of Mathematical Statistics* **27**(3): 832–837.
- Sastry, S. (1999). *Nonlinear systems analysis stability and control*, Vol. 10, Springer. LLC. Interdisciplinary Applied Mathematics.
- Schon, T. B., Ljung, L. and Ninness, B. (2013). Identification of Hammerstein Wiener models, *Automatica* **49**: 70–81.
- Seborg, D., Edgar, T. and Mellichamp, D. (1989). *Process Dynamics and Control*, Vol. 10 of *Monografie*, NY John Wiley.
- Slotine, J. and Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Vol. 136, Prentice-Hall, Inc, New Jersey 07632.
- Soderstrom, T. and Stoica, P. (1989). *System Identification*, Prentice Hall.
- Sprott, J. C. and Linz, S. J. (2000). Algebraically Simple Chaotic Flows, attractor for the chaotic system example, *International Journal of Chaos Theory and Applications* **5**(2).
- Sugie, T. and Osuka, K. (1993). *Robust model following control with prescribed accuracy for uncertain nonlinear system*, Vol. 58, Int. Jour. Control.
- Sussmann, H. J. and Jurdjevic, V. (1972). Controllability of nonlinear systems, *Journal of Differential Equations* **12**(1): 95–116.
- Tan, C. P. and Edwards, C. (2002). Sliding mode observers for detection and reconstruction of sensor faults, *Automatica* **38**: 1815–1821.
- Ton, B. A. (1971). On Strongly Nonlinear Parabolic Equations, *Journal of functional analysis* **7**: 147–155.
- Wei, X., Lu, M., Wang, J., Tsang, K. M., B.Deng and Y.Che (2010). Semi-global robust output regulation of minimum-phase nonlinear systems based on high-gain nonlinear internal model, *International Journal of Control* .
- Xu, F., Olaru, S., Puig, V., Ocampo-Martinez, C. and Niculescu, S.-I. (2017). Sensor-fault tolerance using robust MPC with set-based state estimation and active fault isolation, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **27**: 1260–1283.
- Zak, S. H. (2003). *Systems and Control*, School of Electrical and Computer Engineering Purdue University, New York Oxford Oxford University Press.
- Zheng, G., Boutat, D. and Wang, H. (2017). A nonlinear Luenberger-like observer for nonlinear singular systems, *Automatica* **86**: 11–17.

© Oświadczam że w pracę wykonałem samodzielnie, nie korzystałem z innych źródeł niż cytowane w pracy.