

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej
KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ



AUTOREFERAT ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

mgr inż. Adam Ślusarczyk

STEROWANIE MINIMALNOCZASOWE UKŁADÓW LINIOWYCH – REZULTATY ANALITYCZNE

PROMOTOR:
prof. zw. dr inż. Henryk Górecki

Kraków 2014

1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozprawy jest sterowanie minimalnoczasowe w układach liniowych stacjonarnych o wymuszeniu skalarnym. Generalnie praca dotyczy sterowania w pętli otwartej, aczkolwiek zawiera też pewne wyniki dla pętli zamkniętej.

Optymalizacja procesów sterowania od dawna była przedmiotem badań i wciąż pozostaje tematem aktualnym. Pomimo ekspansji metod numerycznych rozwiązania analityczne zawsze będą posiadać wartość naukową.

Przedstawiona w pracy analiza opiera się o zasadę maksimum Pontriagina, z której wynika, że jeżeli sterowanie minimalnoczasowe istnieje, to musi być ono typu przekaźnikowego, a więc synteza tego sterowania sprowadza się do wyznaczenia jego znaku w chwili początkowej, chwil przełączeń i czasu końcowego (horyzontu).

2. Cel i zakres pracy

Zasadniczym celem pracy było uzyskanie możliwie pełnego rozwiązania analitycznego rozważanego zagadnienia w postaci jawnej oraz wypełnienie luki związanej z brakiem rezultatów analitycznych w zakresie wyznaczania chwil przełączeń sterowania minimalnoczasowego.

3. Struktura rozprawy

Rozprawa składa się z 4 zasadniczych rozdziałów, 2 dodatków i wykazu literatury.

W rozdziale 1 sformułowano problem sterowania minimalnoczasowego dla układów liniowych stacjonarnych w przypadku ogólnym, opisanych równaniem różniczkowym n -tego rzędu. Pokazano istotę klasycznej metody wyznaczania sterowania minimalnoczasowego, która prowadzi do układu równań przestępnych na niewiadome chwile przełączeń i czas końcowy, a także uzyskano pewne zależności między stanami w chwilach przełączeń.

W rozdziale 2 przeprowadzono szczegółową analizę sterowania minimalnoczasowego układów rzędu 2-go, wykorzystując wyniki rozdziału 1, które uogólniono na przypadki biegunów podwójnych i zerowych. Oszacowano obszary sterowalności dla układów niestabilnych rzędu 2-go. Uzyskano rezultaty analityczne dotyczące liczby przełączeń w oscylacyjnych systemach liniowych rzędu 2-go. Liczba przełączeń została wyznaczona dla dowolnych warunków początkowych oraz parametrów równania różniczkowego. Uzyskane zależności analityczne pozwalają na obliczenie czasów przełączeń sterowania minimalnoczasowego.

W rozdziale 3 przedstawiono syntezę sterowania minimalnoczasowego dla układów liniowych rzędu 3-go opisanych równaniem różniczkowym nie zawierającym pochodnej rzędu 2-go. Osobno przeanalizowano przypadki biegunów zespolonych, w tym przypadek dwóch biegunów urojonych, oraz biegunów rzeczywistych.

W rozdziale 4 zaproponowano koncepcję napędu wózka suwnicy oraz – korzystając z przykładu rozwiązanego w rozdziale 3 – przeprowadzono wstępną analizę układu pod względem możliwości zastosowania sterowania minimalnoczasowego.

W Dodatku A pokazano zastosowanie zasady maksimum do problemu minimalnoczasowego dla układów liniowych stacjonarnych opisanych w przypadku ogólnym równaniem różniczkowym n -tego rzędu.

W dodatku B pokazano pewne własności rozwiązania równania różniczkowego liniowego n -tego rzędu o stałych współczynnikach z przekaźnikową funkcją wymuszającą oraz przedstawiono alternatywną drogę do wyników rozdziału 1 w oparciu o teorię wielomianów symetrycznych podstawowych.

4. Sformułowanie problemu

Rozważany będzie układ dynamiczny, o jednym wejściu, opisany równaniem n -tego rzędu

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = u, \quad (1)$$

gdzie a_1, \dots, a_n są stałymi współczynnikami rzeczywistymi.

Stan obiektu opisanego równaniem (1) w dowolnej chwili t jest określony wartościami sygnału będącego rozwiązaniem tego równania i jego pochodnych: $x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$. Zadaniem sterowania u jest przeprowadzenie obiektu ze stanu początkowego w chwili $t_0 = 0$:

$$x(0) = x_0, \quad x^{(1)}(0) = x_0^{(1)}, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (2)$$

do zerowego stanu końcowego:

$$x(t_k) = 0, \quad x^{(1)}(t_k) = 0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_k) = 0 \quad (3)$$

w pewnym skończonym czasie $t_k < +\infty$.

Problem sterowania minimalnoczasowego obiektem opisanym równaniem (1) polega na znalezieniu takiego sterowania \hat{u} , należącego do obszaru sterowań U , które minimalizuje czas przejścia z danego stanu początkowego (2) do zadanego stanu końcowego (3).

Dalej założono obszar sterowań dopuszczalnych

$$U = \{u \in PC([0, +\infty[, R) : |u(t)| \leq 1\}, \quad (4)$$

gdzie $PC([0, +\infty[, R)$ oznacza przestrzeń funkcji przedziałami ciągłych $u: [0, +\infty[\rightarrow R$.

Jeżeli pierwiastki s_1, s_2, \dots, s_n wielomianu charakterystycznego

$$M(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (5)$$

mają niedodatnie części rzeczywiste, to istnieje sterowanie czasoptymalne przeprowadzające układ do początku układu współrzędnych z każdego stanu początkowego w przestrzeni R^n .

W dalszej części tego punktu zakłada się, że współczynniki równania (1) oraz wartości początkowe (2) (nie wszystkie równe zero) są takie, że sterowanie czasoptymalne istnieje.

W przedziale $0 \leq t \leq t_k$ istnieje dokładnie jedno sterowanie czasoptymalne $u(t)$ i spełnia zasadę maksimum Pontriagina. Funkcja $u(t)$ przyjmuje – prawie wszędzie – wartości na brzegu $\partial U = \{-1, +1\}$ obszaru sterowań U (4), jest przedziałami stała i można ją zapisać w postaci $u(t) = \text{sgn } \psi(t)$, gdzie $\psi(t)$ jest pewnym nietrywialnym rozwiązaniem równania jednorodnego

$$\frac{d^n \psi}{dt^n} - a_1 \frac{d^{n-1} \psi}{dt^{n-1}} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \frac{d\psi}{dt} + (-1)^n a_n \psi = 0. \quad (6)$$

Rozwiązanie $\psi(t)$ równania jednorodnego (6) może mieć w przedziale $0 < t < t_k$ co najwyżej skończoną liczbę miejsc zerowych, w których zmienia ono znak. Niech

$$P = \{0 < t < t_k : \psi^{(0)}(t) = \dots = \psi^{(l-1)}(t) = 0, \psi^{(l)}(t) \neq 0, l \in N_n\}, \quad (7)$$

gdzie N_n oznacza zbiór liczb nieparzystych¹. Wtedy zbiór P jest zbiorem wszystkich chwil t_j , w których sterowanie $u(t)$ zmienia znak, tj. $u(t_j^-)u(t_j^+) < 0$ dla $j = 1, \dots, \#P$ ($\#$ – moc zbioru).

¹ Oczywiście warunek zbioru nie może zostać spełniony, jeżeli l nie spełnia nierówności $1 \leq l < n$.

Niech umownym założeniem będzie prawostronna ciągłość funkcji sterującej. Sterowanie czasooptymalne, gdy zbiór chwil przełączeń P (7) jest $(k-1)$ -elementowy, ma postać

$$u(t) = \varepsilon(\mathbf{I}(t) - 2\mathbf{I}(t-t_1) + \dots + (-1)^{k-1}2\mathbf{I}(t-t_{k-1}) + (-1)^k\mathbf{I}(t-t_k)), \quad (8)$$

gdzie \mathbf{I} oznacza funkcję Heaviside'a, $\mathbf{I}(t) = 1$ dla $t \geq 0$ i $\mathbf{I}(t) = 0$ dla $t < 0$, $t_1, \dots, t_{k-1} \in P$ są uporządkowanymi chwilami przełączeń,

$$0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < +\infty, \quad (9)$$

a $\varepsilon = u(0)$ to początkowy znak sterowania równy 1 bądź -1 .

Liczba przełączeń $(k-1)$ zależy zarówno od współczynników równania (1), jak i od stanu początkowego (2). Jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego (5) są rzeczywiste, to zbiór chwil przełączeń (7) jest co najwyżej $(n-1)$ -elementowy, czyli $k \leq n$. W przeciwnym przypadku – liczba przełączeń może być dowolnie duża.

Z założenia ustalony stan początkowy (2) jest dowolny, więc wyznaczenie znaku $\varepsilon = \pm 1$ jest w istocie zagadnieniem syntezy regulatora optymalnego $\varepsilon = \tilde{u}(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)})$, w którym funkcja $\tilde{u}(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ zapewnia realizację sterowania optymalnego w układzie zamkniętym. W każdej chwili t wartość sterowania $u(t) = \tilde{u}(x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$.

5. Rozwiązanie problemu

Funkcja stanu $x(t)$ spełniająca równanie (1) przy warunkach początkowych (2) i sterowaniu (8) jest oczywiście funkcją ciągłą wraz z pochodnymi do rzędu $n-1$. Transformata Laplace'a funkcji $x(t)\mathbf{I}(t)$ ma postać

$$X(s) = \frac{W(s) + U(s)}{M(s)}, \quad (10)$$

gdzie²:

$$U(s) = \frac{\varepsilon}{s} (1 - 2e^{-st_1} + \dots + (-1)^{k-1}2e^{-st_{k-1}} + (-1)^k e^{-st_k}), \quad (11)$$

$$W(s) = (s^{n-1} + a_1s^{n-2} + \dots + a_{n-1})x_0 + \dots + (s + a_1)x_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}, \quad (12)$$

przy czym $U(s)$ jest transformatą funkcji (8) a $M(s)$ jest wielomianem charakterystycznym (5).

Niech wielomian $M(s)$ (5) ma n różnych niezerowych pierwiastków (rzeczywistych bądź zespolonych sprzężonych), tj. $M'(s_i) \neq 0$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz $M(0) \neq 0$.

Zgodnie ze wzorem (10) transformatą odwrotną funkcji $X(s)$ jest

$$x(t)\mathbf{I}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{s_i W(s_i)\mathbf{I}(t) + v(t, s_i)}{s_i M'(s_i)} e^{s_i t} + \frac{v(t, 0)}{M(0)}, \quad (13)$$

gdzie

$$v(t, s) = \varepsilon(\mathbf{I}(t) - 2e^{-st_1}\mathbf{I}(t-t_1) + \dots + (-1)^{k-1}2e^{-st_{k-1}}\mathbf{I}(t-t_{k-1}) + (-1)^k e^{-st_k}\mathbf{I}(t-t_k)).$$

Dla czasów $t \geq t_k$ ze wzoru (13) otrzymuje się

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{W(s_i) + U(s_i)}{M'(s_i)} e^{s_i t}, \quad (14)$$

gdzie $U(s_i) = v(t_k, s_i)/s_i$ jest wartością funkcji (11) dla $s = s_i$.

Z warunku $x(t) = 0$ dla $t \geq t_k$ zastosowanego do wzoru (14) dostaje się układ n równań

$$W(s_i) + U(s_i) = 0 \quad (15)$$

dla $i = 1, \dots, n$ na niewiadome chwile przełączeń t_j ($j = 1, \dots, k-1$) i czas końcowy t_k .

² Przy tym $U(0) = \varepsilon(2t_1 - \dots - (-1)^{k-1}2t_{k-1} - (-1)^k t_k)$.

6. Sterowanie minimalnoczasowe układów rzędu 2-go

6.1. Zależności między chwilami przełączeń

Rozwiązaniem równania (6) jest

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{s_2\psi_0 + \dot{\psi}_0}{s_2 - s_1} e^{-s_1(t-t_0)} + \frac{s_1\psi_0 + \dot{\psi}_0}{s_1 - s_2} e^{-s_2(t-t_0)}, & \Delta > 0, \\ (\psi_0 + (s_i\psi_0 + \dot{\psi}_0)(t-t_0)) e^{-s_i(t-t_0)}, & \Delta = 0, \\ e^{-\operatorname{re}s_i(t-t_0)} \left(\psi_0 \cos(\operatorname{im}s_i(t-t_0)) + \frac{\operatorname{re}s_i\psi_0 + \dot{\psi}_0}{\operatorname{im}s_i} \sin(\operatorname{im}s_i(t-t_0)) \right), & \Delta < 0, \end{cases} \quad (16)$$

gdzie $\Delta = (s_1 - s_2)^2 = a_1^2 - 4a_2$, a $\psi_0 = \psi(t_0)$ i $\dot{\psi}_0 = \dot{\psi}(t_0)$ nie są znane ($|\psi_0| + |\dot{\psi}_0| \neq 0$).

Niech

$$T = \frac{2\pi}{|\operatorname{im}s_i|} \quad (17)$$

określa okres drgań, traktowany jako podwojony odstęp pomiędzy kolejnymi miejscami zerowymi funkcji $\psi(t)$ (16). Jeżeli $\operatorname{im}s_i \rightarrow 0$, to $T \rightarrow +\infty$. Ze wzoru (16) łatwo wykazać, że jeżeli $\Delta \geq 0$, to $T = +\infty$ i zbiór (7) jest co najwyżej jednoelementowy ($k \leq 2$), a jeżeli $\Delta < 0$, to $\frac{1}{2}T = 2\pi/\sqrt{-\Delta}$ i zbiór (7) może zawierać dowolną skończoną liczbę $k-1$ elementów spełniających k dodatkowych zależności:

$$t_1 - t_0 \leq \frac{1}{2}T, \quad t_2 - t_1 = \dots = t_{k-1} - t_{k-2} = \frac{1}{2}T, \quad t_k - t_{k-1} \leq \frac{1}{2}T. \quad (18)$$

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to wzór na szukaną funkcję $u(t)$ (8) zawiera – nie licząc ε – co najwyżej dwie niewiadome t_1 i t_k ($k \leq 2$), które spełniają nierówności (9), czyli:

$$0 < t_1 - t_0, \quad k > 1, \quad (19)$$

$$0 < t_k - t_{k-1}. \quad (20)$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to kolejne chwile przełączeń t_1, \dots, t_{k-1} ($k < +\infty$) różnią się o stałą wartość $\frac{1}{2}T$ (18) i znając dowolną z nich, na przykład t_1 , pozostałe można obliczyć z zależności

$$t_n = t_1 + (n-1)\frac{1}{2}T, \quad n = 2, \dots, k-1. \quad (21)$$

Tak wyliczone chwile t_2, \dots, t_{k-1} oraz t_1 i czas t_k spełniają nierówności (9) i (18), stąd:

$$0 < t_1 - t_0 \leq \frac{1}{2}T, \quad k > 1, \quad (22)$$

$$0 < t_k - t_{k-1} \leq \frac{1}{2}T. \quad (23)$$

Po wyznaczeniu t_{k-1} z (21) i podstawieniu do nierówności (23) można ją zastąpić przez

$$(k-2)\frac{1}{2}T < t_k - t_1 \leq (k-1)\frac{1}{2}T. \quad (24)$$

6.2. Redukcja problemu do układu równań z 2 niewiadomymi

W punkcie 6.1 synteza funkcji $u(t)$ (8) została sprowadzona do wyznaczenia znaku ε oraz czasu t_k i chwili przełączenia t_1 ($k > 1$), spełniających nierówności (19) i (20) ($\Delta \geq 0$) lub (22) i (24) ($\Delta < 0$). Dalsze chwile przełączeń t_2, \dots, t_{k-1} ($\Delta < 0$) tworzą ciąg arytmetyczny i mogą być wyznaczone z zależności (21) ($k > 2$).

Jeżeli parametry a_1 i a_2 równania (1) są rzeczywiste, to

$$U(s) = \frac{\varepsilon}{s} (1 - 2A_{k-1}^T(s) e^{-st_1} + (-1)^k e^{-st_k}), \quad (25)$$

gdzie³

$$A_n^T(s) = \begin{cases} \frac{1 - (-1)^n e^{-nsT/2}}{1 + e^{-sT/2}}, & T < +\infty \wedge e^{-sT/2} \neq -1, \\ n, & T = +\infty \vee e^{-sT/2} = -1. \end{cases} \quad (26)$$

W szczególności $A_0^T(s) = 0$ i $A_1^T(s) = 1$. Dla $k \leq 2$ wzór (25) wynika wprost ze wzoru (11), a dla $k \geq 3$ – z podstawienia (21) do wzoru (11) i zsumowania ciągu geometrycznego

$$2 \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j e^{-st_j} = -2 e^{-st_1} \sum_{j=1}^{k-1} (-e^{-sT/2})^{j-1} = -2A_{k-1}^T(s) e^{-st_1}.$$

Po podstawieniu (17) i $s = s_i$ we wzorach (25)–(26) można otrzymać wzór⁴

$$U(s_i) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{s_i} (1 - 2A_{k-1} e^{-s_i t_1} + (-1)^k e^{-s_i t_k}), & s_i \neq 0, \\ \varepsilon (2A_{k-1} t_1 - (-1)^k t_k), & s_i = 0, \end{cases} \quad (27)$$

gdzie

$$A_{k-1} = A_{k-1}(s_i) = \begin{cases} \frac{e^{(k-1)\pi a_1 / \sqrt{-\Delta}} - 1}{e^{\pi a_1 / \sqrt{-\Delta}} - 1}, & |a_1| \Delta < 0, \\ k-1, & |a_1| \Delta \geq 0, \end{cases} \quad (28)$$

przy czym wzór (28) – z (26), po podstawieniu $s = s_i$ i wyrażeniu s_i przez współczynnik a_1 i Δ .

Stała A_{k-1} zależy od parametrów a_1 i a_2 równania (1) oraz jest funkcją liczby przełączeń $(k-1)$, a tym samym funkcją stanu początkowego (2). W szczególności, dla pierwiastków urojonych $A_{k-1} = k-1$ oraz – podobnie – dla pierwiastków rzeczywistych $A_0 = 0$ i $A_1 = 1$.

W układzie równań (15), gdzie $U(s_i)$ jest dane wzorem (27), są już tylko dwie niewiadome: pierwsza chwila przełączania t_1 i czas końcowy t_k – w szczególności jedna niewiadoma t_k (gdy $k = 1$). Jeżeli $k > 2$ (wtedy $\Delta < 0$), pozostałe chwile t_2, \dots, t_{k-1} wyznacza się z zależności (21).

6.3. Uogólnienie na przypadki biegunów podwójnych i zerowych

Rozwiązanie $x(t)$ równania różniczkowego (1) przy ustalonych warunkach początkowych (2) wyraża się odmiennymi wzorami w zależności od krotności i zerowości pierwiastków s_i wielomianu $M(s)$ (5). Niemniej jednak, wystarczy wyznaczyć rozwiązanie dla pierwiastków różnych i niezerowych, a pozostałe przypadki można otrzymać w granicy według diagramu

$$\begin{array}{ccc} 0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0 & \xrightarrow{s_2 \rightarrow s_1} & s_1 = s_2 \neq 0 \\ \downarrow s_2 \rightarrow 0 & & \downarrow s_1 \rightarrow 0 \\ s_1 \neq s_2 = 0 & \xrightarrow{s_1 \rightarrow 0} & s_1 = s_2 = 0. \end{array}$$

³ Z uwagi na definicję parametru T (17), warunki $T < +\infty$ i $e^{-sT/2} \neq -1$ są równoważne odpowiednio warunkom $\text{im } s_i \neq 0$ (tj. $\Delta < 0$) i $s \neq j(2m+1) \text{im } s_i$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dla pierwiastków s_1 i s_2 rzeczywistych (tj. $T = +\infty$) można przyjąć $A_n^+(s) = \frac{1 - (-1)^n}{2} = n$ dla $n = 0, 1$.

⁴ Po skorzystaniu z równości $e^{-s_i T/2} = e^{-\pi s_i / |\text{im } s_i|} = e^{-j\pi \text{sgn } \text{im } s_i} e^{-\pi \text{re } s_i / |\text{im } s_i|} = -e^{-\pi \text{re } s_i / |\text{im } s_i|}$.

Jeżeli $s_1 \neq s_2$ i $s_1 s_2 \neq 0$ (tj. $\Delta \neq 0$ i $a_2 \neq 0$), to zachodzi wzór (13) (dla $n = 2$). Jeżeli $s_1 = s_2$ lub $s_1 s_2 = 0$ (tj. $\Delta = 0$ lub $a_2 = 0$), to $x(t)$ można otrzymać z tego wzoru przez odpowiednie przejście graniczne. Dla czasów $t \geq t_k$ otrzymuje się

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \frac{W(s_i) + U(s_i)}{s_i - s_{3-i}} e^{s_i t}, & \Delta \neq 0, \\ \sum_{j=0}^1 \frac{d^j (W(s) + U(s))}{ds^j} \Big|_{s=s_i} t^{1-j} e^{s_i t}, & \Delta = 0, \end{cases} \quad (29)$$

gdzie $W(s)$ i $U(s)$ są dane wzorami (12) i (25), a $U(s_i)$ – wzorem (27).

Dla każdego $t \geq t_k$ stan obiektu $x(t) = 0$. Stąd i ze wzoru (29) otrzymuje się dwa równania

$$0 = \begin{cases} (W(s) + U(s)) \Big|_{s=s_i}, & i = 1, 2, \quad \Delta \neq 0, \\ \frac{d^j}{ds^j} (W(s) + U(s)) \Big|_{s=s_i}, & j = 1, 2, \quad \Delta = 0. \end{cases} \quad (30)$$

6.4. Obszary sterowalności dla układów niestabilnych

W pracy wyznaczono kilka warunków koniecznych istnienia rozwiązania układu równań (30) w przypadku biegunów rzeczywistych. Przedstawione twierdzenia ilustrują tylko najprostsze warunki konieczne, tj. nierówności jakie musi spełniać wybrana kombinacja liniowa warunków początkowych, np. $s_1 | -s_2 x_0 + \dot{x}_0 | < 1$, gdy $s_1 > 0$. Można dowieść następujące

Twierdzenie 1. *Jeżeli oba pierwiastki s_1, s_2 wielomianu (5) są dodatnie, to nierówności*

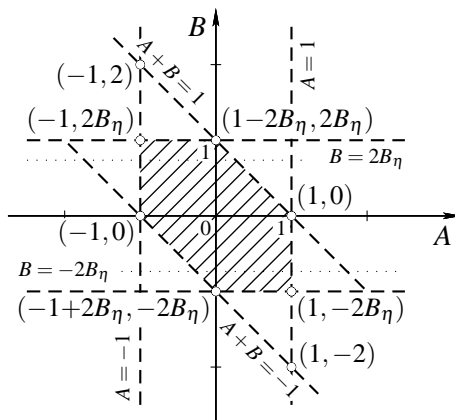
$$|-s_1 s_2 x_0 + s_M \dot{x}_0| < 1, \quad (31)$$

$$|-s_1 s_2 x_0| < 1, \quad (32)$$

$$|s_M \dot{x}_0| < 2s_M s_1^{\frac{s_1}{s_2 - s_1}} s_2^{\frac{s_2}{s_1 - s_2}} \quad (33)$$

są warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania układu równań (30), przy czym dla $s_1 = s_2$ nierówność (33) ma postać $|s_M \dot{x}_0| < 2e^{-1}$ (jest zachowana w granicy $s_2 - s_1 \rightarrow 0$). Zbiór par (x_0, \dot{x}_0) spełniających nierówności (31)–(33) tworzy sześciokąt na płaszczyźnie $0x_0\dot{x}_0$. \square

Niech $A = -s_1 s_2 x_0$, $B = s_M \dot{x}_0$ i $\eta = s_m / s_M$. Interpretację graficzną twierdzenia 1 – dla tak przeskalowanych warunków początkowych – przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna twierdzenia 1 dla $\eta = \frac{1}{2}$.

$$|A + B| < 1, \quad |A| < 1, \quad |B| < 2B_\eta, \quad B_\eta = \begin{cases} \eta^{\frac{\eta}{1-\eta}}, & 0 < \eta < 1, \\ e^{-1}, & \eta = 1. \end{cases}$$

6.5. Układ symetryczny o biegunach rzeczywistych

Niech $s_i = \pm s$, gdzie $s \in R \setminus \{0\}$. W przypadku układów o biegunach rzeczywistych rozłożonych symetrycznie możliwe jest padanie rozwiązań analitycznych w postaci jawnej.

Obszar sterowalności i funkcja regulatora optymalnego w układzie zamkniętym:

$$D = \{(x, \dot{x}) : s|sx + \dot{x}| < 1\} \quad (34)$$

oraz

$$\tilde{u}(x, \dot{x}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}((sx - \dot{x})|sx + \dot{x}| - 2x), & (sx - \dot{x})|sx + \dot{x}| \neq 2x, \\ -\operatorname{sgn}(sx + \dot{x}) = \operatorname{sgn} x = -\operatorname{sgn} \dot{x}, & (sx - \dot{x})|sx + \dot{x}| = 2x. \end{cases} \quad (35)$$

Chwila przełączenia t_1 i horyzont optymalny t_k

$$t_j = \frac{1}{s} \ln \frac{3 - (-1)^j y_1 y_2 + \operatorname{sgn} s \sqrt{(1 - y_1 y_2)(9 - y_1 y_2)}}{(3 - (-1)^j)(\varepsilon s(sx_0 + \dot{x}_0) + 1)} \quad (36)$$

dla $j = 1, k$, gdzie $y_1 y_2 = s^2(s^2 x_0^2 - \dot{x}_0^2 + 2\varepsilon x_0) + 1$ i $\varepsilon = \tilde{u}(x_0, \dot{x}_0)$.

Sterowanie minimalnoczasowe zachodzi bez przełączeń ($k = 1$), jeżeli $\varepsilon = \operatorname{sgn} x_0$ i stan początkowy (2) spełnia zależności:

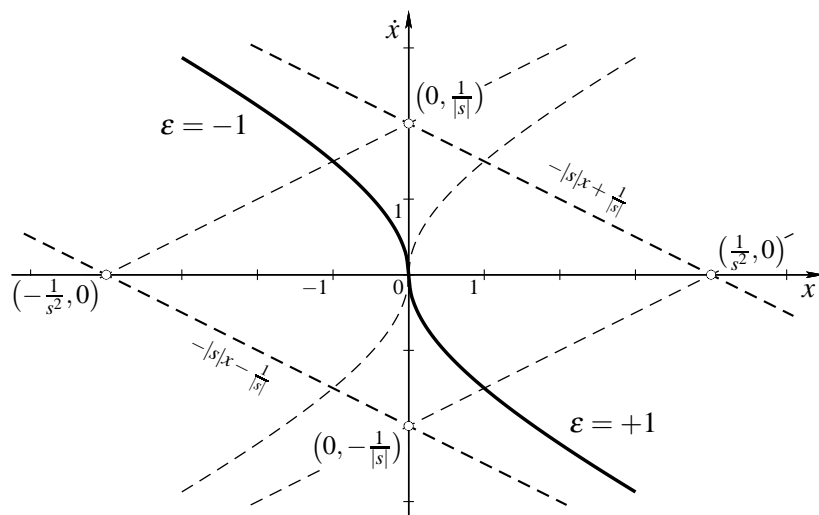
$$(sx_0 + \dot{x}_0)(-sx_0 + \dot{x}_0) = 2|x_0|, \quad -x_0/\dot{x}_0 > |s|, \quad (37)$$

przy tym $|s|x_0 + \dot{x}_0| < 1/|s|$.

Stąd krzywa przełączania składa się z dwóch ramion hiperbol (rys. 2) o równaniach

$$\left(\frac{x + \varepsilon/s^2}{1/s^2}\right)^2 - \left(\frac{\dot{x}}{1/s}\right)^2 = 1 \quad (38)$$

dla $\varepsilon = \pm 1$ przy ograniczeniu $x\dot{x} < 0$.



Rys. 2. Krzywa przełączania dla pierwiastków symetrycznych rzeczywistych dla $|s| = \frac{1}{2}$.

Jeżeli sterowanie minimalnoczasowe zachodzi z przełączeniem, to czas poruszania się punktu po krzywej przełączania w kierunku początku układu jest dany wzorem

$$t_k - t_1 = \frac{1}{s_i} \ln \left(\frac{5 - y_1 y_2}{4} + \operatorname{sgn} s_i \sqrt{\left(\frac{5 - y_1 y_2}{4}\right)^2 - 1} \right), \quad (39)$$

gdzie $y_1 y_2$ jest określone przy wzorze (36).

6.6. Liczba przełączeń w układzie oscylacyjnym

Jeżeli pierwiastki s_1, s_2 wielomianu $M(s)$ (5) (o współczynnikach rzeczywistych a_1, a_2) nie są rzeczywiste (są zespolone sprzężone), to liczba przełączeń $(k-1)$ sterowania czasoptymalnego $u(t)$ (8) w przedziale $t_0 < t < t_k$ może być dowolnie duża.

Układ równań (30) sprowadza się do jednego równania

$$W(s_i) + U(s_i) = 0, \quad (40)$$

które – przy wspomnianych wcześniej zależnościach pomiędzy chwilami przełączeń (p. 6.1) – ma dokładnie jedno rozwiązanie na t_1 i t_k , jeżeli liczba przełączeń

$$k - 1 = \left\lceil \frac{\sqrt{-\Delta}}{\pi a_1} \ln \left(1 + (|y_0| e^{-a_1/\sqrt{-\Delta} \arg(\varepsilon/y_0)} - 1) \operatorname{tgh} \frac{\pi a_1}{2\sqrt{-\Delta}} \right) \right\rceil, \quad (41)$$

gdzie $\arg z \in]-\pi, \pi]$ dla dowolnego $z \in C$ oraz $y_0 = -a_2 x_0 + (-a_1/2 + j\sqrt{-\Delta}/2)\dot{x}_0 + \varepsilon$.

Dla pierwiastków urojonych liczbę przełączeń można otrzymać z (41) w granicy $a_1 \rightarrow 0$.

7. Podsumowanie

W pracy przedstawiono sterowanie minimalnoczasowe układów liniowych stacjonarnych rzędu 2-go. Wyznaczono wzór na liczbę przełączeń w funkcji warunków początkowych i parametrów równania różniczkowego oraz podano zależności analityczne pozwalające na obliczenie chwil przełączeń i czasu końcowego. Dokonano syntezy regulatora minimalnoczasowego dla systemów o symetrycznym rozkładzie biegunów oraz systemów oscylacyjnych w przypadku ogólnym. Rozważaniem objęto zarówno układy stabilne, jak i niestabilne, dla których określono obszary sterowalności.

Przedstawiono sterowanie minimalnoczasowe układów liniowych stacjonarnych rzędu 3-go. Rozważaniem objęto zarówno układy stabilne, jak i niestabilne spełniające warunki symetrii. Podano wzory na liczbę przełączeń w funkcji warunków początkowych oraz parametru równania różniczkowego. Wyznaczono zależności analityczne pozwalające na obliczenie chwil przełączeń i czasu końcowego oraz dokonano syntezy optymalnej funkcji sterującej. Przykładem, gdzie dynamika obiektu może być modelowana równaniem rzędu 3-go, jest sterowanie wózkiem suwnicy. Podano propozycję rozwiązania napędu wózka suwnicy i przeprowadzono obliczenia kinematyczno-dynamiczne wskazujące na możliwość zastosowania sterowania naprzemiennego.

Zdaniem autora praca uzupełnia wiedzę w badanym obszarze o oryginalne rezultaty analityczne, z których za najbardziej wartościowe uważa on wyniki uzyskane dla oscylacyjnych układów rzędu 2-go, przede wszystkim jawny wzór na liczbę przełączeń w zależności od warunków początkowych i współczynników równania różniczkowego, konstrukcję optymalnej trajektorii stanu oraz układy równań pozwalające na obliczenie chwil przełączeń i horyzontu optymalnego. W przypadku układów o symetrycznym rozkładzie biegunów wzory te mają postać jawną. Co prawda dla układów niesymetrycznych konieczne jest, w ogólnym przypadku, numeryczne rozwiązanie podanego w pracy równania, jest to jednak łatwe, gdyż równanie to zadane jest w postaci funkcji wypukłej, która ma dokładnie jedno miejsce zerowe w danym przedziale (przy założeniu, że sterowanie minimalnoczasowe istnieje). Postać otrzymanych równań umożliwia łatwe wyznaczenie programów sterowania optymalnego, a tym samym posuwa naprzód dziedzinę sterowania optymalnego.

Jako istotne autor uważa również wyniki otrzymane dla układów rzędu 3-go o symetrycznym rozkładzie biegunów, w tym oszacowania liczby przełączeń i czasu końcowego w przypadku biegunów urojonych oraz jawne rozwiązania w przypadku sterowania stałego i z jednym przełączeniem, a także sprowadzenie układu równań przestępnych dla układów rzeczywistych do równania algebraicznego czwartego stopnia dla dwóch przełączeń.

Możliwości analityczne dla układów wyższych rzędów są bardzo ograniczone. Nawet dla układów rzędu 3-go pojawiają się trudności z wyznaczeniem wzorów ogólnych. Uogólnienia mogą iść w kierunkach układów, których transmitancja posiada zera, a także układów wielowymiarowych.

Literatura

- [1] Akulenko L.D., Kostin G.V.: *Analytical synthesis of time-optimal control in a third-order system*. J. Appl. Maths Mechs, Vol. 64, No. 4, 2000, pp. 509–519.
- [2] Anderson B.D.O., Moore J.B.: *Linear Optimal Control*. Prentice Hall 1971.
- [3] Athans M., Falb P.L.: *Optimal Control*. New York, McGraw-Hill, 1966.
- [4] Boltyanski V., Gorelikova S.: *Optimal synthesis for nonoscillatory controlled objects*. Journal of Applied Analysis, Vol. 3, No. 1, 1997, pp. 1–21.
- [5] Bołtianski W.G.: *Matematyczne metody sterowania optymalnego*. Warszawa, WNT, 1971.
- [6] Brockett R.W.: *Finite Dimensional Linear Systems*. New York, John Wiley and Sons, 1970.
- [7] Bucy R.S.: *Two-Point Boundary Value Problems of Linear Hamiltonian Systems*. SIAM J. Appl. Math. Vol. 15, No. 6, Nov. 1967, pp. 1385–1389.
- [8] Chang S.S.L.: *Synthesis of optimum control systems*. New York, McGraw-Hill, 1961.
- [9] Chernousko F.L., Shmatkov A.M.: *Time-optimal control in a third-order system*. J. Appl. Maths Mechs, Vol. 61, No 5, 1997, pp. 699–707.
- [10] Feldbaum A.A.: *Podstawy teorii optymalnych układów sterowania automatycznego*. Warszawa, PWN, 1967.
- [11] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. wyd. II popr., 1980.
- [12] Gamkrelidze R.V.: *The Theory of Time-Optimal Processes in Linear Systems*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., vol. 22, pp. 449–474, 1958.
- [13] Gessing R.: *Sterowanie czasowo-optymalne obiektami o funkcjach przejścia zawierających zera*. Praca hab. Nr 91, Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej (Nr 254), Gliwice, Politechnika Śląska, 1969.
- [14] Górecki H., Turowicz A.: *On switching instants in minimum-time control problem. I. One-dimensional case*. Bull. de L'Acad. Pol. des. Sci., Ser. Sci. Techn., Vol. 16, No. 2, 1968, s. 205–210.
- [15] Górecki H., Turowicz A.: *On switching instants in minimum-time control problem. II. One-dimensional case n-tuple eigenvalue*. Bull. de L'Acad. Pol. des. Sci., Ser. Sci. Techn., Vol. 16, No. 2, 1968, s. 211–218.
- [16] Górecki H., Turowicz A.: *On switching instants in multidimensional minimum-time control problems*. Bull. Acad. Sci., Ser. Sci. Techn., Vol. 16, No 8 1968, s. 691-698.
- [17] Górecki H.: *Określenie zależności między maksimum uchybu dynamicznego i momentem jego wystąpienia dla liniowych stacjonarnych układów dynamicznych*. Elektrotechnika, t. 16, z. 2, 1997, s. 107–116.
- [18] Górecki H.: *A new method for analytic determination of extremum of the transients in linear systems*. Control and Cybernetics, t. 33, z. 2, 2004, s. 275–295.
- [19] Górecki H., *Optymalizacja i sterowanie systemów dynamicznych*. Kraków, UWND AGH 2006.
- [20] Górecki R.: *Sterowanie czasowo-optymalne układu rzeczywistego*. Praca doktorska, AGH. Kraków 1968.

- [21] Gognard F., Sepulchre R.: *Computation of time-optimal switchings for linear systems with complex poles*. European Control Conference 2003, Cambridge (September 2003).
- [22] Harvey, C.A.: *Determining the Switching Criterion for Time-optimal control*. J. Math. Anal, and Appl., Vol. 5, No. 2, 1962, pp. 245–257.
- [23] Hejmo W.: *Teoria sterowania czasoptymalnego*. Warszawa, PWN, 1990.
- [24] Hermes H., LaSalle J.P.: *Functional Analysis and Time Optimal Control* (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 56). New York/London 1969, Academic Press, 1969.
- [25] Kaczorek T.: *Teoria układów regulacji automatycznej*. Warszawa, WN-T, 1977.
- [26] Kaczorek T.: *Teoria sterowania*. tom 2, PWN, Warszawa, 1981.
- [27] Kaczorek T.: *Teoria sterowania i systemów*. Warszawa, WN PWN, 1999.
- [28] Kalman R.E.: *When is a linear control system optimal?* J. Basic Engrg. Trans. ASME, Ser. D, vol. 86, 1964, pp. 51–60.
- [29] Kwakernaak H., Sivan R.: *Linear optimal control systems*. New York, John Wiley and Sons, 1972.
- [30] Leitmann G.: *An Introduction to Optimal Control*. New York, McGraw-Hill, 1966.
- [31] Luenberger D.G.: *Canonical forms for linear multivariable system*. IEEE Trans. Autom. Control, AC-12, No. 3, June 1967, pp. 290–293.
- [32] Malek-Zavarei M.: *Time-optimal control of a third-order plant*. Kybernetika, Vol. 16, No. 1, 1980, pp. 71–85.
- [33] Markus L., Lee E.B.: *Foundations of Optimal Control Theory*. New York, Wiley, 1967.
- [34] Miłkowski W.: *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WNT, 1991.
- [35] Mostowski A.: *Elementy algebry wyższej*. Wyd. 9. Warszawa, PWN, 1977.
- [36] Neustadt L.W.: *Synthesizing time-optimal control systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1, 1960, pp. 484–493.
- [37] Ogata K.: *State space analysis of control systems*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, Prentice-Hall, Inc., 1967.
- [38] Pallu de la Barrière R.: *Matematyczne podstawy teorii sterowania automatycznego*. PWN, 1972.
- [39] Pontriagin L.S., Gamkrelidze R.V., Mischchenko E.F., Bołtiański W.G.: *Matematyczna teoria procesów optymalnych*. Warszawa, MON, 1968.
- [40] Potter J., Velde W.V.: *On The Existence Of Stabilizing Compensation*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 14, No. 1, 1969, pp. 97–98.
- [41] Ślusarczyk A., Kwiczala M., *Synteza regulatora minimalnoczasowego w oscylacyjnych systemach liniowych drugiego rzędu*, PAK, 2005, Nr 11, s. 21–24.
- [42] Ślusarczyk A., *Sterowanie i synteza regulatora minimalnoczasowego dla oscylacyjnych systemów liniowych drugiego rzędu*, Automatyka, tom 10, 2006, zeszyt 1, s. 73–86.
- [43] Ślusarczyk A., *Sterowanie minimalno-czasowe układów rzędu drugiego*, Studia z Automatyki i Informatyki, tom 31, 2006, s. 123–136.
- [44] Ślusarczyk A., *Sterowanie minimalno-czasowe układów rzędu trzeciego*, Studia z Automatyki i Informatyki, tom 33, 2008, s. 103–122.
- [45] Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: *Sterowanie i systemy dynamiczne*. WN-T, 1976.
- [46] Tou J.T.: *Modern control theory*. New York, McGraw-Hill, 1964.
- [47] Turnau A.: *Sterowanie docelowe układami nieliniowymi w czasie rzeczywistym – algorytmy inteligentne i optymalno-czasowe*. Kraków, UWND AGH, 2002.
- [48] Turowicz A., Miłkowski W.: *Teoria macierzy: wykłady na studium doktoranckim w zakresie automatyki i elektrotechniki w roku akademickim 1970/1971*. Kraków, UWND AGH, 2005.
- [49] Tuttle T.D.: *Creating Time-Optimal Commands for Linear Systems*. Ph.D., M.I.T., 1997.
- [50] Wołek S.: *Wyznaczanie sterowania czasowo-optymalnego obiektami liniowymi typu całkującego*. Podstawy Sterowania. tom 1, 1971, zeszyt 2, s. 105–114.
- [51] Wołek S., *Wyznaczanie stałych sterowania optymalnego obiektami liniowymi*, Podstawy Sterowania, tom 1, 1971, zeszyt 3–4, s. 209–222.
- [52] Wonham W.M.: *On pole assignment in multi-input controllable linear systems*. IEEE Trans. Autom. Control, 12, 1967, pp. 660–665.