Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Elektrotechniki, Automatyki,
Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

Katedra Elektrotechniki i Elektroenergetyki

Autoreferat Rozprawy Doktorskiej

Numeryczne algorytmy tomografii rezystancji siatek rezystorów

mgr inż. Piotr Zegarmistrz

Promotor:
dr hab. inż. Zbigniew Galias, prof. AGH

Kraków, 2013

1. Wprowadzenie i cel pracy

W dysertacji analizowany jest problem tomografii rezystancji siatek rezystorów [3][5]. Jest to problem dyskretny, w którym na podstawie pomiarów elektrycznych na brzegu układu składającego się ze skończonej liczby elementów określane są wartości konduktancji (bądź rezystancji) tych elementów. Problem ten ma potencjalne zastosowania w dziedzinie tomografii ośrodków ciągłych. W zastosowaniach tych wyznaczane są właściwości fizyczne ośrodka ciągłego przez zamodelowanie go odpowiednio gęstym układem dyskretnym. Realizacja taka jest możliwa pod warunkiem opracowania efektywnych technik tomografii rezystancyjnej układów dyskretnych składających się z wystarczająco dużej liczby elementów.

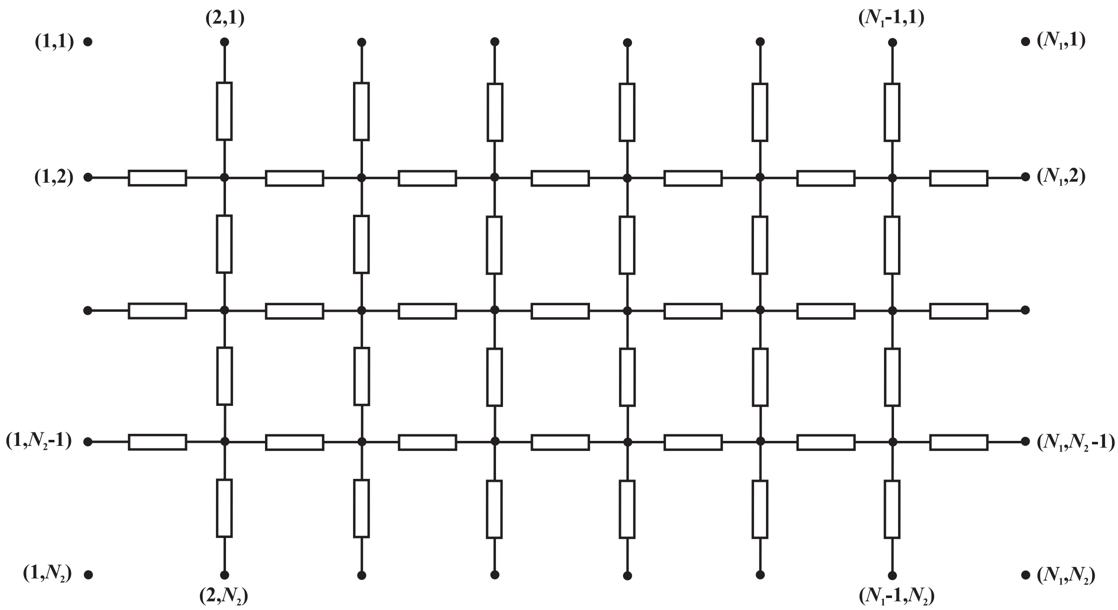
Rozważany problem może mieć również praktyczne zastosowania w sytuacjach, gdy siatka elementów rezystancyjnych jest wykorzystywana do wyznaczenia rozkładu ciężaru, temperatury lub innych parametrów fizycznych danej powierzchni. W tych zastosowaniach tworzy się siatkę rezystorów o znanym rozmiarze i strukturze połączeń. Elementy łączące węzły siatki wykonane są z tzw. „inteligentnych" materiałów, czyli takich, których właściwości elektryczne zależą od innych parametrów fizycznych. Parametrami tymi mogą być m.in. temperatura elementu lub nacisk na jego powierzchnię. W sytuacji, gdy znana jest zależność konduktancji od zmiany interesującej nas wielkości fizycznej (np. temperatury) można zbudować układ pozwalający na monitoring zmian rozkładu tego parametru fizycznego na powierzchni układu. Możliwe jest wówczas wykorzystanie metod tomografii siatek rezystorów do stworzenia obrazu rozkładu danego parametru fizycznego i obserwowanie jego zmian w czasie rzeczywistym.

Autor postanowił zbadać, czy możliwe jest wykorzystanie algorytmów rekonstrukcji konduktancji siatek rezystorów w sytuacjach praktycznych oraz w tomografii ośrodków ciągłych z satysfakcjonującą dokładnością. Na podstawie badań wykonanych podczas przygotowania niniejszej dysertacji autor sformułował poniższą tezę:

Możliwe jest takie sformułowanie postawionego w pracy problemu, które pozwala na realizację algorytmów rekonstrukcji bazujących na metodach optymalizacyjnych poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych. Istniejące algorytmy rekonstrukcji konduktancji elementów skończonych siatek rezystorów na podstawie pomiarów brzegowych cechuje ograniczenie dotyczące rozmiarów siatek możliwych do rekonstrukcji. Możliwe jest ulepszenie istniejących algorytmów rekonstrukcji w taki sposób, aby pozwalały na rekonstrukcję układów składających się z większej liczby elementów oraz były bardziej odporne na występowanie niedokładności pomiarów.

2. Rekonstrukcja konduktancji na podstawie pomiarów brzegowych

Siatkę rezystorów można zdefiniować jako obwód elektryczny, w którym elementy rezystancyjne łączą sąsiednie węzły kratownicy. W pracy rozważany jest przypadek, gdy węzły siatki wypełniają kratownicę o kształcie prostokąta. Założono, że każdy węzeł wewnętrzny jest połączony z czterema węzłami sąsiednimi za pomocą elementu o zadanej konduktancji, która jest skończona i dodatnia, podczas gdy każdy węzeł brzegowy jest połączony z tylko jednym węzłem wewnętrznym. Obrazuje to przykład przedstawiony na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Siatka rezystorów o wymiarach $N_1 \times N_2$=8×5 węzłów.

Kształt siatki rezystorów przedstawiony na rys. 2.1 nie jest ograniczeniem. W rozważanym przypadku węzły brzegowe nie są połączone ze sobą. Jeżeli przyjąć założenie odwrotne, tzn. siatka zawiera połączenia o niezerowej konduktancji pomiędzy węzłami brzegowymi, można wtedy dołączyć do wszystkich węzłów brzegowych dodatkowe konduktancje o ustalonej wartości. Wtedy siatka uzyska omawiany kształt, a liczby wierszy i kolumn zwiększą się o 2.

Postawiony w niniejszej pracy problem odwrotny polega na wyznaczeniu wartości konduktancji wszystkich elementów prostokątnej siatki rezystancyjnej na podstawie pomiarów brzegowych. Zakłada się, że istnieje fizyczny dostęp jedynie do węzłów należących do brzegu siatki. Można sobie wyobrazić dwie metody uzyskania informacji na temat konduktancji elementów siatki rezystancyjnej. W pierwszej wersji, wymuszeniem jest wektor potencjałów węzłów brzegowych. Odpowiedzią układu na to wymuszenie jest wektor prądów w elementach brzegowych. W drugiej wersji mamy do czynienia z sytuacją odwrotną. Wektor potencjałów w węzłach brzegowych jest odpowiedzią układu na wymuszenie w postaci wektora prądów w elementach brzegowych.

3. Algorytmy rekonstrukcji konduktancji

W pracy zaproponowano, zaimplementowano i przetestowano szereg algorytmów rekonstrukcji konduktancji, bazujących zarówno na optymalizacyjnych metodach poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych, z odpowiednio zdefiniowaną funkcją celu, jak również na algorytmie analitycznym zaproponowanym przez Curtisa i Morrowa [3].

3.1. Właściwości funkcji celu

W przypadku algorytmów bazujących na metodach optymalizacyjnych należy sformułować problem rekonstrukcji konduktancji jako problem poszukiwania minimum globalnego funkcji wielu zmiennych. W tym celu należy zdefiniować funkcję celu, której zmiennymi są wartości konduktancji wszystkich elementów siatki, a jej minimum globalne odpowiada rozwiązaniu problemu rekonstrukcji. Następnie, stosując wybraną metodę optymalizacyjną, znaleźć wektor konduktancji elementów siatki dla którego funkcja celu przyjmuje wartość minimalną.

Funkcję celu zdefiniowano w oparciu o odwzorowanie Neumann-Dirichlet, czyli odpowiedź układu w postaci wektora potencjałów węzłów brzegowych na wymuszenie w postaci wektora prądów w elementach brzegowych. W każdej serii pomiarów zakładamy, że wymuszamy odpowiednie prądy w elementach brzegowych (dane wejściowe – zestaw Neumanna) i dokonujemy pomiaru napięć pomiędzy węzłami brzegowymi (dane wyjściowe – zestaw Dirichleta).

Funkcję celu zdefiniowano w następujący sposób:

$$f(G) = \frac{\sum_{s=1}^{l} \sum_{t=1}^{N_b - 1} (V^{\text{org}}{}_{s,t} - V^{\text{test}}{}_{s,t})^2}{\sum_{s=1}^{l} \sum_{t=1}^{N_b - 1} (V^{\text{org}}{}_{s,t})^2} \tag{3.1}$$

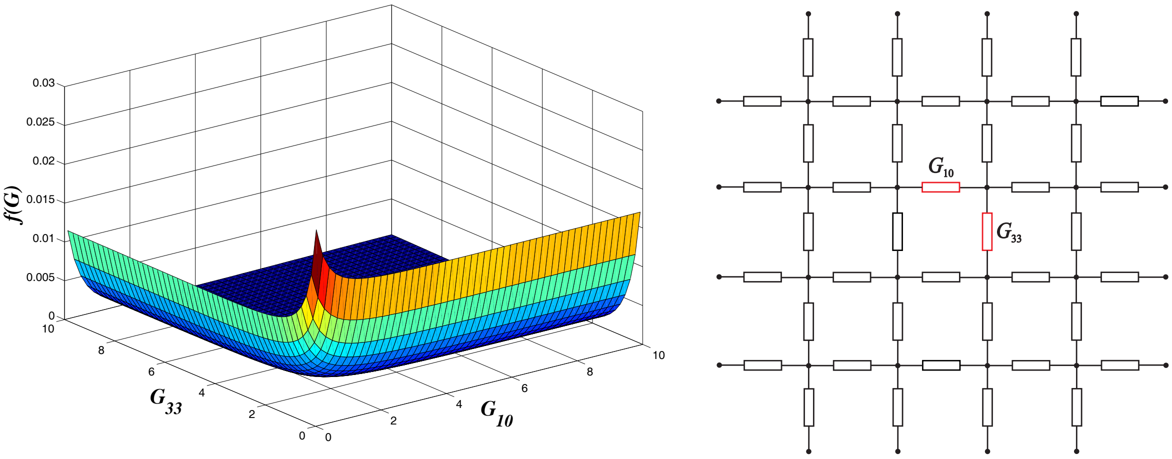
gdzie $G = [G_1, G_2, ..., G_{N_e}]$ jest wektorem konduktancji elementów siatki, N_e jest liczbą elementów siatki, l jest liczbą zestawów pomiarowych, N_b jest liczbą węzłów brzegowych, N_b–1 jest rozmiarem wektora potencjałów brzegowych, $V^{\text{org}}{}_{s,t}$ oznacza zmierzoną wartość potencjału węzła t w s-tym zestawie pomiarów oryginalnej, nieznanej siatki (rekonstruowanej), a $V^{\text{test}}{}_{s,t}$ jest obliczoną wartością potencjału węzła t w s-tym zestawie pomiarów testowej siatki rezystancyjnej (dopasowywanej) opisanej wektorem konduktancji G.

Do obliczenia wartości funkcji celu dla wybranej siatki dopasowywanej użyto $l=N_1+N_2-4$ zestawów pomiarowych, gdzie N_1 i N_2 są odpowiednio liczbami kolumn i wierszy siatki. W każdym zestawie pomiarowym tylko dwa elementy wektora wymuszeń prądowych mają niezerowe wartości. Zadany prąd (przykładowo J=1) jest wstrzykiwany do wybranego węzła brzegowego i pobierany z węzła leżącego symetrycznie po przeciwnej stronie siatki. W następnym kroku źródło prądowe z górnego wiersza przesuwane jest o jedną pozycję w prawo, a źródło w dolnym wierszu o jedną pozycję w lewo – symetrycznie względem środka siatki. Po osiągnięciu ostatniego węzła w górnym i dolnym wierszu (krok N_1-2), w kolejnym kroku należy przesunąć źródła do górnego węzła skrajnej prawej kolumny i dolnego węzła skrajnej lewej kolumny. Ostatecznie, po osiągnięciu dolnego węzła prawej kolumny i górnego wiersza lewej kolumny (ostatni krok) obliczenie wartości funkcji celu jest zakończone.

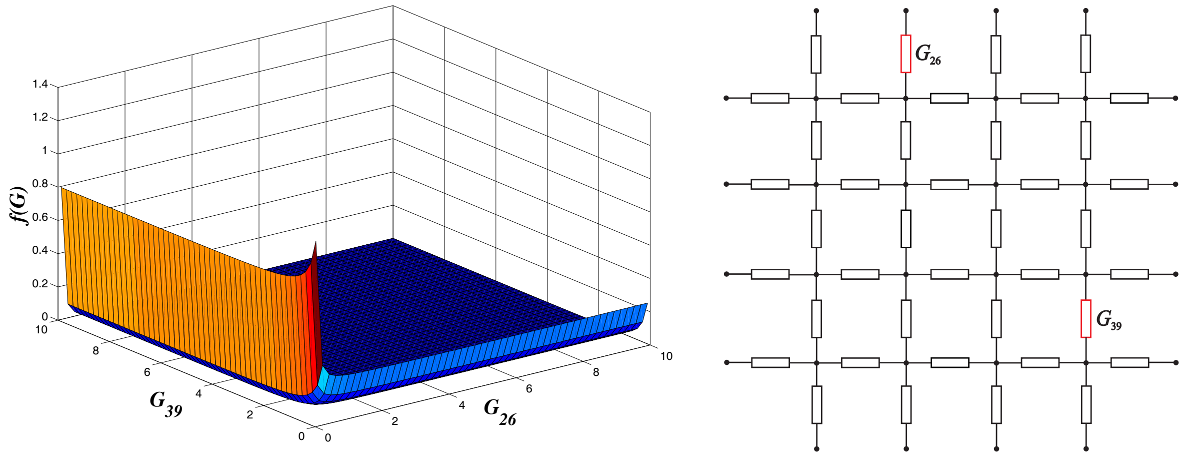
Gdy siatka dopasowywana jest taka sama jak siatka rekonstruowana, funkcja celu (3.1) przyjmuje zerową wartość. Gdy siatka dopasowywana różni się od siatki rekonstruowanej, różnią się również wektory potencjałów brzegowych porównywanych siatek, będące odpowiedziami na ten sam wektor prądów brzegowych. Funkcja celu przyjmuje więc wartość dodatnią.

Taka definicja funkcji celu pozwala na miarodajną ocenę każdej analizowanej siatki. Ponadto, problem rekonstrukcji konduktancji siatki można sformułować jako problem znalezienia minimum funkcji wielu zmiennych f.

Aby określić pewne charakterystyczne właściwości funkcji celu wygenerowano wykresy przedstawiające zależność wartości funkcji celu od dwóch wybranych konduktancji siatki. Wartość funkcji celu jest obliczana dla siatek, w których wszystkie konduktancje poza dwiema wybranymi do analizy mają wartości równe wartościom konduktancji rekonstruowanej siatki, a wybrane dwa parametry są zmieniane w całym zakresie wybranego przedziału z zadaną rozdzielczością. Punkt środkowy płaszczyzny X-Y odpowiada sytuacji, gdy wartości wybranych konduktancji są równe wartościom dla rekonstruowanej siatki. W punkcie tym funkcja celu przyjmuje wartość zero. W pozostałych punktach funkcja celu przyjmuje wartości dodatnie. Przykładowe wykresy przedstawiono na rys 3.1 i 3.2.



Rys. 3.1. Wartość funkcji celu w funkcji zmiennych (G_{10},G_{33}) dla siatki o rozmiarze 6×6 węzłów (40 elementów)



Rys. 3.2. Wartość funkcji celu w funkcji zmiennych (G_{26},G_{39}) dla siatki o rozmiarze 6×6 węzłów (40 elementów)

Najważniejszą obserwacją jest, że funkcja celu może być bardzo płaska w otoczeniu minimum. Wynika z tego, że znalezienie w przestrzeni poszukiwań punktu o bardzo małej wartości funkcji celu nie oznacza, że znalezione rozwiązanie jest blisko oryginału.

Inną istotną obserwacją jest, że kształt uzyskanych wykresów bardzo mocno zależy od wyboru zmiennych, od których uzależniamy wartość funkcji celu. Niektóre konduktancje siatki mają duży wpływ na wartość funkcji celu, podczas gdy w przypadku innych wpływ ten jest praktycznie niezauważalny. Można zauważyć, że wartości konduktancji leżących w pobliżu brzegu siatki mają duży wpływ na wartość funkcji celu, podczas gdy wartości konduktancji leżących w pobliżu środka nie wpływają na nią znacząco. Oznacza to, iż poprawność rekonstrukcji konduktancji zależy od położenia elementów w siatce. Im bliżej środka siatki położony jest dany element, tym trudniej jest wyznaczyć jego konduktancję z satysfakcjonującą dokładnością.

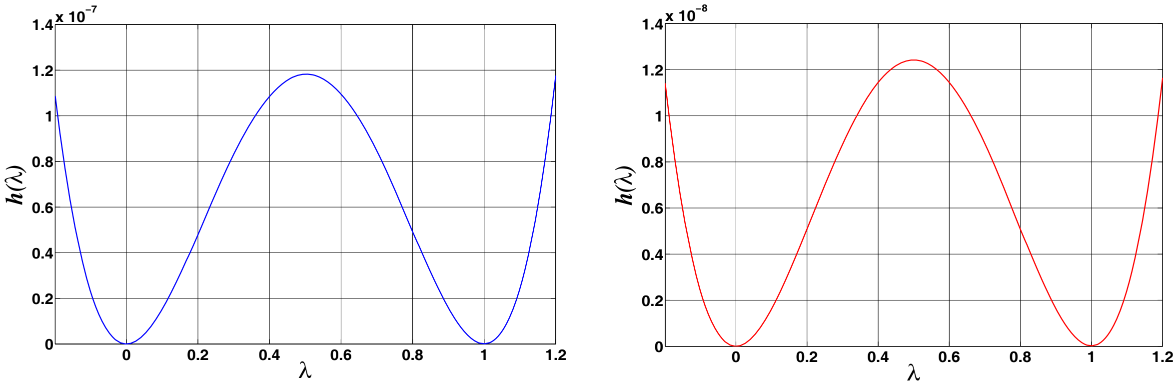
Na rys. 3.3 przedstawiono jednowymiarowe przekroje funkcji celu dla przypadku siatki o rozmiarze 10×10 węzłów, tj. wykresy funkcji:

$$h(\lambda) = f((1-\lambda)G^{\mathrm{org}} + \lambda G^{\mathrm{test}}) \tag{3.2}$$

gdzie G^{org} jest siatką oryginalną, zaś G^{test} jest rozwiązaniem uzyskanym za pomocą jednej z metod optymalizacyjnych opisanych w dalszej części autoreferatu.

Dla $\lambda = 0$ wyrażenie $(1-\lambda)G^{\mathrm{org}} + \lambda G^{\mathrm{test}}$ opisuje siatkę rekonstruowaną i funkcja przyjmuje minimum globalne o wartości 0. Dla $\lambda = 1$ wyrażenie $(1-\lambda)G^{\mathrm{org}} + \lambda G^{\mathrm{test}}$ opisuje siatkę uzyskaną w wyniku zastosowania procedury optymalizacyjnej. Jak widać z załączonych wykresów, dla $\lambda = 1$ obserwujemy minimum lokalne funkcji h, co oznacza, że procedura optymalizacyjna prawdopodobnie utknęła w minimum lokalnym funkcji celu.

W pierwszym przypadku przedstawionym na rys. 3.3 wartość funkcji h dla siatki dopasowywanej wynosi $h(1) = 1{,}873 \cdot 10^{-8}$, przy maksymalnym błędzie rekonstrukcji wynoszącym 0,63698. W drugim przypadku $h(1) = 5{,}173 \cdot 10^{-9}$, a błąd rekonstrukcji 0,36087. Oznacza to, że funkcja celu może przyjmować bardzo niewielkie wartości dla siatek dopasowywanych odległych od siatki rekonstruowanej, co znacznie utrudnia proces optymalizacji. Przedstawione powyżej wyniki pokazują również, że funkcja celu może posiadać wiele minimów lokalnych.



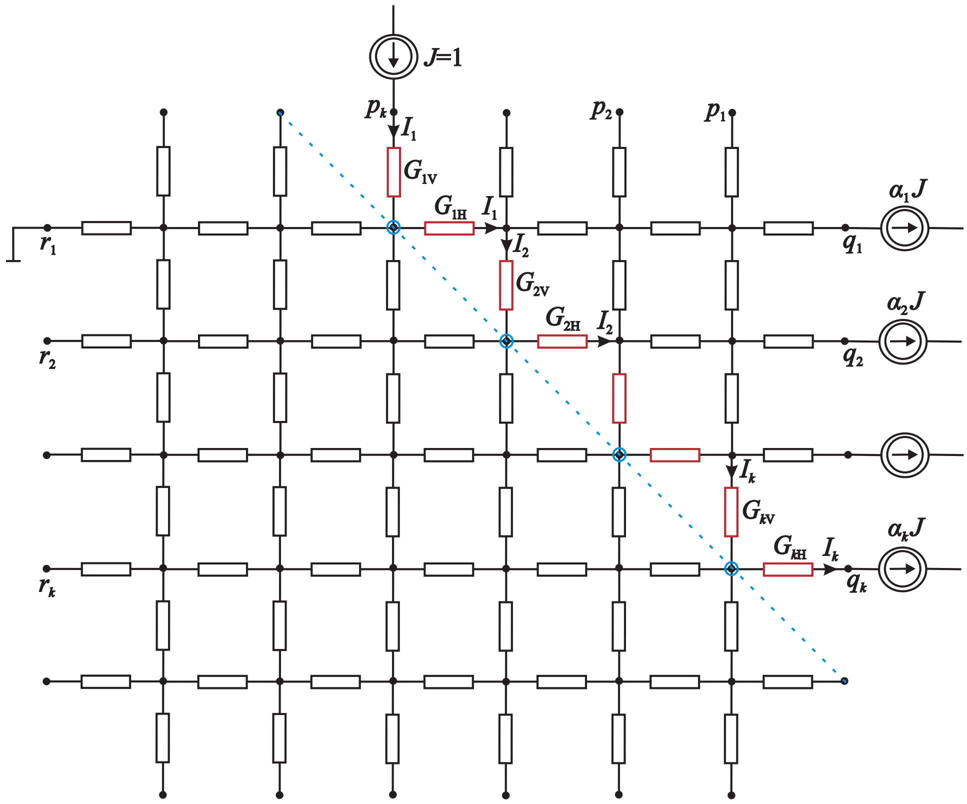
Rys. 3.3. Przekroje jednowymiarowe funkcji celu

W pracy zastosowano szereg algorytmów optymalizacji stochastycznej i deterministycznej poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych. Spośród metod optymalizacji stochastycznej wybrano metodę Monte Carlo [9], algorytm symulowanego wyżarzania [7] oraz algorytm genetyczny, należący do klasy algorytmów ewolucyjnych [6].

Wybrane algorytmy optymalizacji deterministycznej można podzielić na dwie grupy – takie, które używają bądź nie używają obliczonych numerycznie lub analitycznie wartości pochodnych funkcji celu do poszukiwania jej minimum. Algorytmem nie korzystającym z informacji dostarczanych przez pochodne funkcji celu jest algorytm sympleksowy Neldera-Meada [8]. Spośród algorytmów korzystających z pochodnych wybrano metodę quasi-Newtona [1] z metodą interpolacji wielomianowej, metodę sekwencyjnego programowania kwadratowego [4] oraz nieliniową metodę najmniejszych kwadratów [2].

3.2. Idea algorytmu analitycznego

Analityczny algorytm rekonstrukcji konduktancji na podstawie pomiarów brzegowych został zaproponowany przez Edwarda B. Curtisa i Jamesa A. Morrowa. Algorytm ten działa w oparciu o spostrzeżenie, że istnieją współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ takie że, przy wymuszeniu prądów w węzłach brzegowych $j_{p_k} = 1$; $j_{q_m} = \alpha_m$ dla $m = 1, 2, ..., k$; $j_i = 0$ dla pozostałych węzłów, potencjały V_i wszystkich węzłów leżących na i poniżej ukośnej przerywanej linii z rys. 3.4 są równe zero [3].



Rys. 3.4. Zestaw prądów brzegowych wymuszających zerowy potencjał we wszystkich węzłach siatki leżących na i poniżej ukośnej przerywanej linii.

Na tej podstawie można rekonstruować elementy siatki ukośnymi warstwami, przy czym w *k*-tym kroku rekonstruowane jest 2*k* elementów znajdujących się bezpośrednio ponad ukośną przerywaną linią z rys. 3.4. Po wprowadzeniu niewielkich modyfikacji algorytm ten można stosować dla siatek nie-kwadratowych, dla których liczba kolumn siatki jest większa od liczby wierszy.

W pracy zostały zaproponowane modyfikacje oryginalnego algorytmu Curtisa i Morrowa. Z testów opisanych w rozdziale 4 wynika, że algorytm ten dla większych rozmiarów siatek jest niestabilny numerycznie i wrażliwy na niedokładność pomiarów, a to ogranicza znacząco rozmiar siatek możliwych do rekonstrukcji.

W każdym kroku algorytmu rekonstrukcji wykonywana jest duża liczba operacji arytmetycznych, w których wykorzystywane są wartości konduktancji obliczone we wcześniejszych krokach. Błędy rekonstrukcji, które są stosunkowo niewielkie w początkowych krokach algorytmu (blisko narożników siatki) propagują się podczas kolejnych obliczeń i są znacząco powiększane. Maksymalny błąd rekonstrukcji jest zawsze obserwowany na jednym z elementów znajdujących się w pobliżu środka siatki. Elementy te są wyznaczane w ostatnich krokach algorytmu.

W celu poprawy skuteczności działania algorytmu należy dążyć do zminimalizowania liczby operacji matematycznych potrzebnych do obliczenia wybranej konduktancji. Zmniejszenie liczby operacji można osiągnąć dzięki uruchomieniu algorytmu z czterech narożników jednocześnie. W tej wersji algorytm jest uruchamiany dla ośmiu siatek równocześnie – siatki oryginalnej, jej kopii powstałej poprzez odbicie oryginalnej siatki względem głównej przekątnej oraz siatek powstałych poprzez obrót obu powyższych o 90, 180 i 270 stopni. Dzięki takiemu usprawnieniu udało się zmniejszyć liczbę kroków niezbędnych do obliczenia konduktancji wybranego elementu. Pozwoliło to zmniejszyć efekt propagacji błędów zaokrągleń.

Innym sposobem poprawy algorytmu jest wykorzystanie wszystkich dostępnych danych do obliczenia współczynników $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. W oryginalnym rozwiązaniu wykorzystywanych jest tylko $k-1$ równań dla węzłów brzegowych, dla których w k-tym kroku potencjał ma wynosić zero. W połączeniu z równaniem zapewniającym spełnienie prądowego prawa Kirchhoffa (suma współczynników $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ wynosi jeden), powstaje układ k równań liniowych, na podstawie którego obliczane są wartości $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. W zmodyfikowanej wersji algorytmu zapisany zostaje układ równań liniowych wszystkich węzłów brzegowych leżących poniżej ukośnej, przerywanej linii. W ten sposób powstaje nadokreślony układ równań, a współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ zostają wyznaczone jako rozwiązanie odpowiedniego problemu minimalizacyjnego. Do rozwiązania tego układu równań zastosowano metodę najmniejszych kwadratów.

4. Wybrane wyniki działania algorytmów rekonstrukcji

W ramach przeprowadzonych badań zaimplementowano i przetestowano wszystkie algorytmy rekonstrukcji konduktancji przedstawione w poprzednim rozdziale. Implementacji poszczególnych algorytmów dokonano z wykorzystaniem języka programowania C++ oraz środowiska Matlab wraz z pakietem funkcji optymalizacyjnych. Zaimplementowano i przetestowano algorytmy działające w oparciu o metody optymalizacyjne. Stworzono program symulacyjny realizujący oryginalny algorytm rekonstrukcji Curtisa i Morrowa. Algorytm ten został przetestowany pod względem stabilności numerycznej oraz wrażliwości na błędy pomiarowe. Następnie zaimplementowano zaproponowane modyfikacje algorytmu analitycznego oraz zbadano ich wpływ na skuteczność działania algorytmu, zarówno w środowisku bezszumowym jak i w przypadku występowania błędów pomiarowych.

W celu analizy działania i porównania algorytmów wykonywano wiele uruchomień programu dla różnych, losowo wygenerowanych oryginalnych siatek, a następnie uśredniano maksymalny względny błąd rekonstrukcji. Parametr ten, zdefiniowany jako:

$$\eta = \max_{i=1,\dots,N_e} \frac{\left|G_i^{\mathrm{org}} - G_i^{\mathrm{test}}\right|}{G_i^{\mathrm{org}}} \tag{4.1}$$

przyjęto jako główne kryterium oceny algorytmów rekonstrukcji.

4.1. Algorytmy optymalizacyjne

W dysertacji przedstawiono szereg wyników testów dla procedur rekonstrukcji działających w oparciu o metody optymalizacji stochastycznej. Ze względu na fakt, iż wyniki te są znacząco gorsze niż dla metod optymalizacji deterministycznej, w autoreferacie przedstawiono wybrane wyniki tylko dla drugiej z wymienionych grup metod. Algorytmy rekonstrukcji konduktancji elementów siatek rezystancyjnych bazujące na metodach optymalizacji deterministycznej zostały przetestowane w środowisku Matlab, w wersji 7.12.0 (R2011a). Algorytmy porównano dla różnych rozmiarów siatek i różnego zakresu wartości konduktancji, z których zbudowana jest siatka. W celu porównania metod przeprowadzono dla każdego z algorytmów rekonstrukcję konduktancji dla 20 losowych siatek testowych. W tabelach przedstawione są wyniki średnie. Zaobserwowano, że maksymalny błąd rekonstrukcji z reguły występuje na elemencie położonym blisko środka siatki.

W tab. 4.1 przedstawiono wyniki doświadczeń przeprowadzonych dla siatek o rozmiarze 4×4 węzły, składających się z elementów, w których wartości konduktancji były losowo wybierane z przedziału [0,1; 10,0].

Tab. 4.1. Porównanie metod optymalizacyjnych dla siatki o wymiarach 4×4 węzły.

Algorytm	G_{MIN}	G_{MAX}	η (maksymalny względny błąd rekonstrukcji)	Średni czas obliczeń [s]
sympleksowy-NM	0,1	10,0	1,4779972	1,230723
quasi-Newton	0,1	10,0	0,0001183	1,103715
sekw. prog. kw.	0,1	10,0	0,0000077	1,129632
niel. met. najmn. kw.	0,1	10,0	0,0000000	0,123826

Jak widać, już dla niewielkiego rozmiaru siatki (siatka o rozmiarze 4×4 węzły ma 12 elementów) istnieją bardzo poważne różnice w działaniu poszczególnych algorytmów. Należy zwrócić uwagę na bardzo dużą wartość błędu rekonstrukcji dla metody sympleksów Neldera-Meada. Oznacza to, że metoda ta jest praktycznie nieprzydatna już dla stosunkowo niewielkiego wymiaru problemu. Algorytmy bazujące na metodzie quasi-Newtona oraz sekwencyjnego programowania kwadratowego dla siatek o rozmiarze 4×4 węzły działają z satysfakcjonującą precyzją. Jednakże nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów przewyższa pozostałe metody, zarówno pod względem precyzji rekonstrukcji, jak również czasu obliczeń.

Zaobserwowano, że nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów działa w taki sposób, że albo osiąga minimum globalne funkcji celu w stosunkowo krótkim czasie, albo jej czas obliczeń znacznie się wydłuża i algorytm zatrzymuje się po osiągnięciu ustawionej wartości maksymalnej liczby iteracji, nie znajdując minimum. W związku z tym, w tab. 4.2 oprócz średniego czasu obliczeń zaprezentowano parametr oznaczający odsetek poprawnych wyników rekonstrukcji, czyli tych, które doprowadziły do osiągnięcia globalnego minimum funkcji celu.

Tab. 4.2. Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów dla różnych rozmiarów siatek.

Rozmiar Siatki	G_{MIN}	G_{MAX}	% poprawnych wyników	Średni Czas Obliczeń [s]
3×3	0,1	10,0	100	0,081235
4×4	0,1	10,0	100	0,123826
5×5	0,1	10,0	80	0,732583
6×6	0,1	10,0	70	4,101307
7×7	0,1	10,0	20	30,18785
8×8	0,1	10,0	0	30,90485

Wraz ze zwiększaniem rozmiaru siatki, maleje odsetek przypadków, w których funkcja osiąga minimum globalne i znajduje poprawne rozwiązanie. Zastosowano usprawnienie polegające na uruchomieniu procedury wielokrotnie, z różnych punktów startowych i wybraniu najlepszego rozwiązania. Pozwoliło to na rekonstrukcję dla siatki o rozmiarze 7 ze 100%-ową skutecznością, ale nie pozwoliło na poprawę działania algorytmu dla większych siatek.

Osiągnięcie prawidłowej rekonstrukcji dla większych siatek jest możliwe przy zmniejszonym zakresie możliwych konduktancji. W kolejnych testach zakres ten zmniejszono z [0,1; 10,0] do [1,0; 2,0]. Porównanie algorytmów przy ograniczonym zakresie wartości konduktancji może być bardziej interesujące z praktycznego punktu widzenia. Zbadano działanie algorytmu bazującego na nieliniowej metodzie najmniejszych kwadratów dla różnych rozmiarów siatek i z losowo wybranym punktem startowym. Wyniki obliczeń przedstawiono w tab. 4.3.

Tab. 4.3. Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów – ograniczony zakres konduktancji.

Rozmiar Siatki	G_{MIN}	G_{MAX}	% poprawnych wyników	Średni Czas Obliczeń [s]
7×7	1,0	2,0	100	0,76
8×8	1,0	2,0	100	2,09
9×9	1,0	2,0	77	32,95

Zgodnie z oczekiwaniami, redukcja przestrzeni poszukiwań pozwoliła poprawić skuteczność działania algorytmu. Dla siatek o rozmiarze 9×9 węzłów w 77% uruchomień algorytmu uzyskano prawidłowy wynik rekonstrukcji, podczas gdy we wcześniejszym przypadku (szerszy zakres konduktancji) algorytm nie działał już dla siatek o rozmiarze 8×8 węzłów.

W tab. 4.4 zaprezentowano wyniki badań algorytmu rekonstrukcji bazującego na nieliniowej metodzie najmniejszych kwadratów dla siatek o nie-kwadratowym kształcie. Jak zauważono dla siatek kwadratowych, maksymalny błąd rekonstrukcji z reguły występuje na elemencie zbliżonym do środka siatki. Postanowiono przetestować skuteczność wspomnianego algorytmu w sytuacji, gdy odległość każdego elementu od brzegu siatki w jednym z kierunków jest niewielka. Dane zawarte w tab. 4.4 potwierdzają, że nie-kwadratowy kształt siatki znacząco ułatwia rekonstrukcję. Udało się dokonać rekonstrukcji siatki o rozmiarze 5×25 węzłów (164 elementy) z precyzją lepszą niż 1%. W przypadku siatek kwadratowych ograniczenie rozmiaru siatek możliwych do rekonstrukcji metodami optymalizacyjnymi jest na poziomie 9×9 węzłów (112 elementów).

Tab. 4.4. Rekonstrukcja siatek prostokątnych dla nieliniowej metody najmniejszych kwadratów.

Rozmiar Siatki	Liczba elementów siatki	G_{MIN}	G_{MAX}	Tolerancja wartości funkcji celu	Najlepszy maksymalny względny błąd rekonstrukcji	η (średni maksymalny względny błąd rekonstrukcji)	Średni czas obliczeń [s]
5×12	73	1,0	2,0	10^{-14}	0,000000000	0,000000001	4.3572
5×15	94	1,0	2,0	10^{-14}	0,000000000	0,000000000	12.5012
5×20	129	1,0	2,0	10^{-14}	0,000000000	0,023802310	61.6597
5×20	129	1,0	2,0	10^{-10}	0,000002319	0,005439043	55.0746
5×20	129	1,0	2,0	10^{-6}	0,016863032	0,071949568	39.4746
5×25	164	1,0	2,0	10^{-14}	0,000000000	0,003608110	144.7721
5×25	164	1,0	2,0	10^{-10}	0,000005371	0,102464460	143.6221

Wykazano, że algorytm bazujący na nieliniowej metodzie najmniejszych kwadratów przewyższa skutecznością pozostałe algorytmy optymalizacyjne. Udowodniono, że dla wybranego zakresu możliwych konduktancji istnieje ograniczenie rozmiaru siatki, dla którego rekonstrukcja prowadzi do poprawnego rezultatu, przy zachowaniu satysfakcjonującego czasu obliczeń. Pokazano, że redukcja zakresu możliwych wartości konduktancji elementów siatki pozwala na rekonstruowanie siatek o większych rozmiarach.

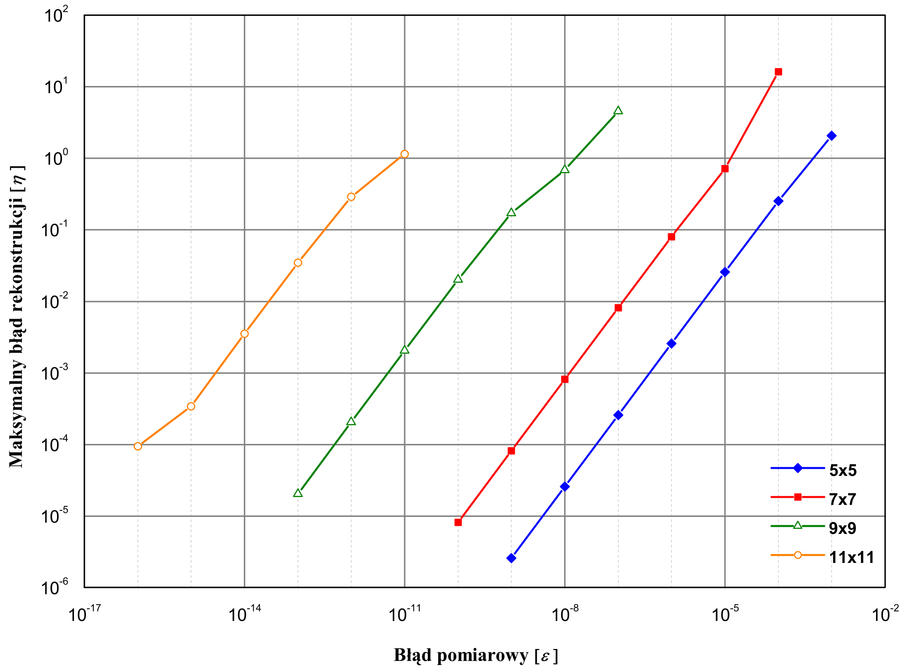
4.2. Algorytm analityczny z usprawnieniami

W pierwszej serii eksperymentów zbadano stabilność numeryczną oryginalnego algorytmu analitycznego Curtisa i Morrowa w przypadku niewystępowania błędów pomiarowych. Analizowano siatki kwadratowe – o równej liczbie wierszy i kolumn, gdyż umożliwia to uzależnienie pewnych zmierzonych parametrów od rozmiaru siatki oraz obserwacje, jak zmienia się dany parametr wraz z rozmiarem siatki. Jako główne kryterium oceny algorytmu przyjęto maksymalny względny błąd rekonstrukcji, zdefiniowany wzorem (4.1).

Zauważono, że maksymalny błąd rekonstrukcji rośnie wraz z rozmiarem siatki i istnieje granica rozmiaru siatki, dla której procedura rekonstrukcji w zaproponowanej wersji jest bezużyteczna, gdyż generuje wyniki obarczone błędem o tym samym rzędzie wielkości, co wartości konduktancji elementów siatki. Dla siatki o rozmiarze 13×13 węzłów algorytm bez błędów pomiarowych rekonstruuje wartości konduktancji z maksymalnym błędem na poziomie 0,4 (odchylenie o 40%). Dla siatki o rozmiarze 15×15 maksymalny względny błąd rekonstrukcji osiąga wartości znacznie powyżej

100%, co oznacza, że algorytm generuje bezużyteczne wyniki (porównaj rys. 4.2 – przebieg „wersja 1”). Niektóre obliczone wartości konduktancji są ujemne.

Następnie zbadano działanie algorytmu w przypadku, gdy wyniki pomiarów potencjałów węzłów brzegowych obarczone są błędami. W celu symulacji w programie błędów pomiarowych na zadanym poziomie ε wyliczony potencjał każdego węzła brzegowego jest mnożony przez $1+\zeta$, przy czym ζ jest zmienną losową z przedziału $[-\varepsilon; \varepsilon]$ o rozkładzie równomiernym. Zmodyfikowane wartości potencjałów brzegowych są wykorzystywane przez algorytm rekonstrukcji.



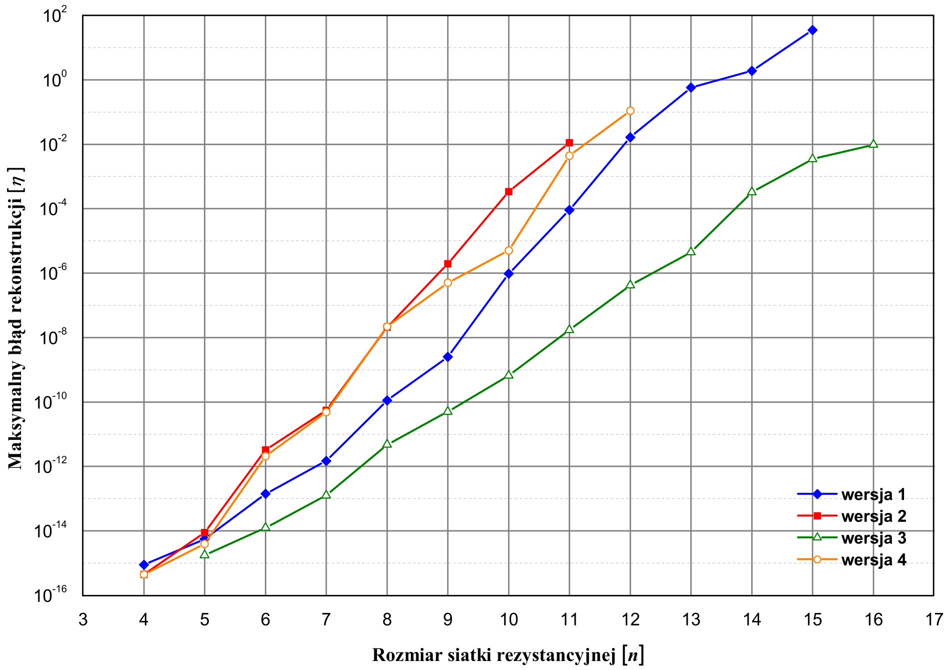
Rys. 4.1. Maksymalny błąd rekonstrukcji w funkcji błędu pomiaru potencjału brzegowego.

Rys. 4.1 przedstawia zależność błędu rekonstrukcji od poziomu błędów pomiarowych dla wybranych rozmiarów siatek. Można zauważyć, że dla ustalonego rozmiaru siatki zależność pomiędzy błędem pomiarowym (niedokładność pomiaru potencjału brzegowego), a błędem rekonstrukcji jest w przybliżeniu liniowa w skali logarytmicznej. Algorytm wzmacnia zaburzenia danych wejściowych, a współczynnik wzmocnienia (wskaźnik uwarunkowania problemu) zależy od rozmiaru siatki (lub, co równoznaczne, od liczby kroków algorytmu rekonstrukcji).

Stosunek maksymalnego błędu rekonstrukcji do błędu pomiarowego jest w przybliżeniu wartością stałą dla danego rozmiaru siatki. Algorytm w formie opisanej w pracy [3] nie nadaje się do rekonstrukcji konduktancji rzeczywistych siatek zbudowanych z więcej niż 10×10 węzłów. Dla takiego rozmiaru siatek występowanie błędów pomiaru potencjałów węzłów brzegowych skutkuje błędami rekonstrukcji o 10 rzędów wielkości większymi.

Poniżej przedstawiono wykresy obrazujące skuteczność działania algorytmu z usprawnieniami zaproponowanymi w pracy w porównaniu do oryginalnej wersji. We wszystkich poniższych wykresach używane są następujące oznaczenia. „Wersja 1" oznacza oryginalny algorytm, „wersja 2" – algorytm, w którym współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są wyznaczone przy użyciu metody najmniejszych kwadratów. W „wersji 3" algorytm jest uruchamiany dla 8 siatek równocześnie. „Wersja 4" łączy modyfikacje „wersji 2" i „wersji 3".

Na podstawie rys. 4.2 można zauważyć, że wersja 2 działa gorzej niż wersja 1, a wersja 4 gorzej niż 3. W tym przypadku wersja 3 algorytmu pozwala na zrekonstruowanie siatki o wymiarach 16×16 węzłów (420 elementów) z błędem rekonstrukcji mniejszym niż 1%. To znacząco lepszy wynik niż dla oryginalnego algorytmu, który osiągał błąd rekonstrukcji około 1% dla siatki o rozmiarze 12×12 (220 elementów).

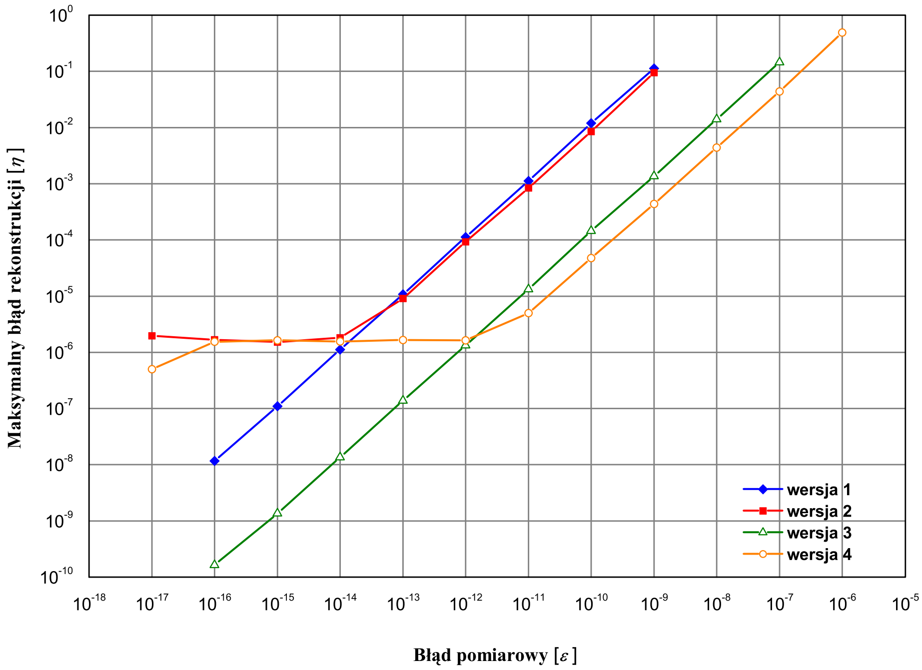


Rys. 4.2. Maksymalny względny błąd rekonstrukcji η w przypadku zerowych błędów pomiarowych w funkcji rozmiaru siatki n.

W kolejnej serii testów wprowadzane są błędy pomiarowe w zakresie od 10^{-17} do 10^{-2}. Dla każdego poziomu błędów pomiarowych obliczono średnią wartość maksymalnego błędu rekonstrukcji dla 100 wywołań procedury rekonstrukcji. Przykładowe wyniki symulacji zostały przedstawione na rys. 4.3. Dla siatki o rozmiarze 5×5 węzłów wszystkie wersje algorytmów działają podobnie, przy czym wersja 4 daje najlepsze rezultaty. Dla większych siatek różnice w skuteczności działania poszczególnych algorytmów są wyraźnie widoczne i pogłębiają się wraz ze zwiększaniem rozmiaru siatki.

We wszystkich zbadanych przypadkach wersja 3 przewyższa swoją skutecznością pozostałe wersje dla niskiego poziomu błędów pomiarowych.

Dla wyższego poziomu zakłóceń wersja 4 spisuje się lepiej. Fakt ten należy wytłumaczyć tym, że w przypadku niskiego poziomu zakłóceń pomiaru potencjałów węzłów brzegowych procedura najmniejszych kwadratów wprowadza dodatkowe błędy zaokrągleń, co wpływa na ostateczny wynik, natomiast przy większych błędach pomiarowych stosowanie metody najmniejszych kwadratów prowadzi do uśredniania błędów pomiarowych, a zatem redukcji ich wpływu na wynik rekonstrukcji.

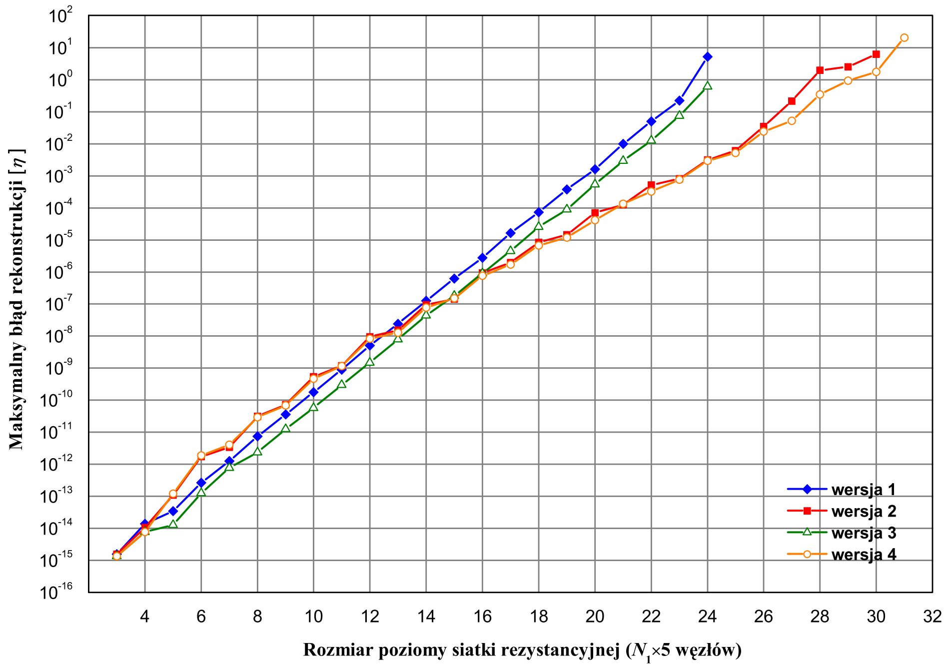


Rys. 4.3. Działanie algorytmu oryginalnego i zmodyfikowanych. Błąd rekonstrukcji η w funkcji błędu pomiarowego ε dla siatki o rozmiarze 9×9 węzłów.

Dla siatki o rozmiarze 9×9 węzłów najlepsza wersja algorytmu daje wyniki 100 razy lepsze niż oryginalny algorytm, podczas gdy dla siatki 11×11 błąd rekonstrukcji jest pomniejszony ponad 1000-krotnie. Różnice w skuteczności rekonstrukcji między algorytmem oryginalnym i jego modyfikacjami rosną wraz z rozmiarem siatki.

W dalszych badaniach sprawdzono działanie wszystkich czterech wersji algorytmu analitycznego dla siatek prostokątnych, w których występuje duża dysproporcja pomiędzy wymiarem poziomym i pionowym siatki. W celu usystematyzowania prezentacji wyników przyjęto, że jeden z rozmiarów siatki będzie stały, a drugi będzie zmieniany w dużym zakresie. Na rys. 4.4 zaprezentowano zależność maksymalnego względnego błędu rekonstrukcji od rozmiaru poziomego siatki przy założeniu braku błędów pomiarowych, w przypadku, gdy rozmiar pionowy ustalony był na 5 węzłów.

W przypadku najlepszej z metod, można zrealizować rekonstrukcję konduktancji siatki o rozmiarze 27×5 węzłów ze średnią wartością maksymalnego względnego błędu rekonstrukcji na poziomie 5%.



Rys. 4.4. Maksymalny względny błąd rekonstrukcji η w przypadku zerowych błędów pomiarowych w funkcji rozmiaru poziomego siatki prostokątnej N_1.

Z rys. 4.4 wynika również, że wraz ze wzrostem jednego z rozmiarów siatki zwiększa się pozytywny wpływ zastosowania modyfikacji algorytmu polegającej na wyznaczeniu współczynników $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ przy użyciu metody najmniejszych kwadratów na precyzję uzyskanego wyniku (wersje 2 oraz 4).

5. Wnioski

Na podstawie wyników symulacji w podsumowaniu dysertacji postawiono szereg wniosków, z których najważniejsze to:

– Algorytmy bazujące na metodach optymalizacyjnych pozwalają na rekonstrukcję konduktancji siatek o stosunkowo niewielkich rozmiarach, a rozmiar siatek możliwych do rekonstrukcji mocno zależy od zakresu konduktancji elementów.
– Oryginalny algorytm analityczny zaproponowany w [3] przez Curtisa i Morrowa pozwala na rekonstrukcję konduktancji elementów siatek rezystancyjnych, ale tylko w ograniczonym zakresie rozmiarów siatek. Dla większych rozmiarów siatek (powyżej 12×12 węzłów) algorytm jest niestabilny numerycznie i generuje bezużyteczne wyniki. Ponadto, algorytm jest bardzo wrażliwy na obecność błędów pomiarowych potencjałów brzegowych i wrażliwość ta rośnie bardzo szybko z rozmiarem siatki.
– Największą skuteczność i stabilność numeryczną wykazuje zmodyfikowany algorytm analityczny. Modyfikacja polegająca na uruchomieniu algorytmu dla ośmiu siatek równocześnie, pozwala na obliczanie wartości konduktancji elementów siatek o większych rozmiarach (nawet 16×16 węzłów) ze stosunkowo niewielkim

błędem. Natomiast modyfikacja polegająca na wyznaczaniu wartości współczynników $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ metodą najmniejszych kwadratów pozwala zwiększyć odporność algorytmu na istnienie błędów pomiaru potencjałów w węzłach brzegowych.

– Możliwe jest zastosowanie algorytmów rekonstrukcji konduktancji w sytuacji, gdy użytkownik konstruuje siatkę elementów rezystancyjnych, których właściwości elektryczne zależą od innych parametrów fizycznych, takich jak temperatura czy nacisk na powierzchnię elementu. Nawet dla siatek o rozmiarze 9×9 węzłów metoda taka może być wykorzystana do oszacowania rozkładu ciężaru lub innej wielkości fizycznej na pewnej powierzchni.
– Największe wartości względne błędu rekonstrukcji konduktancji obserwowane są na elementach położonych blisko środka siatki. Generalnie, im bardziej dany element jest oddalony od brzegu siatki, tym większym błędem obarczona jest jego rekonstrukcja. Wydaje się zatem możliwe rekonstruowanie stosunkowo dużych siatek, gdy wymiar siatki jest niewielki w jednym z kierunków.

Literatura

[1] Broyden C. G., *The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms*, Journal Inst. Math. Applic., nr 6, 1970, s. 76-90.

[2] Coleman T. F., Li Y., *An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds*, SIAM Journal on Optimization, t. 6, 1996, s. 418–445.

[3] Curtis E. B., Morrow J. A., *Determining the resistors in a network*, SIAM J. Appl. Math., nr 50, 1990, s. 918-930.

[4] Gill P. E., Murray W., Wright M. H., *Practical Optimization*, Academic Press, London, 1981.

[5] Goff M., *Recovering networks with signed conductivities*, REU Summer Research, Inverse Problems, University of Washington, 2003, s. 1-18.

[6] Holland J., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Anbor, 1975.

[7] Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P., *Optimization by simulated annealing*, Science 220 (4598), 1983, s. 671-680.

[8] Lagarias J. C., Reeds J. A., Wright M. H., Wright P. E., *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*, SIAM Journal of Optimization, t. 9, nr 1, 1998, s. 112–147.

[9] Metropolis N., Ulam S., *The Monte Carlo Method*, Journal of the American Statistical Association, t. 44, nr 247, 1949, s. 335-341.