

**Akademia Górniczo-Hutnicza**  
im. Stanisława Staszica w Krakowie



Wydział Elektrotechniki, Automatyki,  
Informatyki i Inżynierii Biomedycznej  
Katedra Elektrotechniki i Elektroenergetyki

Autoreferat rozprawy doktorskiej

**Kształtowanie rozkładu pola magnetycznego  
z wykorzystaniem zaawansowanych metod  
obliczeniowych**

mgr inż. Bartłomiej Garda

Promotor:  
dr hab. inż. Zbigniew Galias, prof. AGH

Kraków, 2013

# 1 Wstęp

Budowa magnesów wytwarzających pole magnetyczne o zadanym kształcie należy do zagadnień syntezy pola magnetycznego. Synteza pola jest przedmiotem intensywnych badań od wielu lat. Głównym celem pracy doktorskiej autora było porównanie różnych metod obliczeniowych do rozwiązania problemu syntezy pola magnetycznego oraz wskazanie najbardziej efektywnej metody. Metody zostały porównane pod względem jakości rozwiązania oraz złożoności obliczeniowej.

W pracy analizowane są dwa problemy kształtowania pola magnetycznego. Pierwszy liniowy problem polega na doborze wartości prądów przy zadanym kształcie cewki, natomiast problem nieliniowy polega na doborze kształtu cewki przy stałej gęstości prądu. Praca zawiera wyniki uzyskane wieloma metodami optymalizacji. W celu weryfikacji wykorzystanych metod przedstawiono analizę cewki rzeczywistej, wykonanej wg projektu autora. Dokonano porównania cewki rzeczywistej z cewką zaprojektowaną przy użyciu metod analizowanych w pracy.

## Teza pracy

Postawiono następującą tezę pracy:

**Wykorzystanie odpowiednio dobranych metod obliczeniowych, umożliwia dokładniejsze i bardziej efektywne rozwiązanie zagadnienia syntezy pola magnetycznego, niż metody dotychczas stosowane.**

Praca dotyczyła syntezy pola magnetycznego w cewkach powietrznych. Rozważano problem wytworzenia pola magnetycznego w środowisku magnetycznie liniowym i jednorodnym (powietrze). Założenie takie pozwalało na wykorzystanie analitycznych zależności opisujących problem. Uniknięto wykorzystania numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych opisujących zagadnienie, takich jak metoda elementów skończonych czy brzegowych. Rezygnując w pewnym sensie z ogólności rozwiązania, można konstruować cewki wytwarzające zadane pole magnetyczne w sposób bardziej dokładny i w znacznie krótszym czasie.

## 2 Podstawowe pojęcia

### Pole magnetyczne cewki

W pracy wykorzystano analityczną zależność określającą wartość indukcji pola magnetycznego  $b$  w dowolnym punkcie przestrzeni wywołanej pojedynczym zwojem prądowym. Wykorzystując tę zależność można cewkę magne-

tyczną potraktować jako zbiór złożony z  $n$  pojedynczych zwojów i zastosować zasadę superpozycji do wyznaczenia wartości pola magnetycznego w dowolnym punkcie. W przypadku liniowym zależność między prądami pojedynczych zwojów a pole magnetyczne w wybranych punktach ma postać  $Ax = b$ , gdzie macierz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  jest macierzą współczynników,  $x \in \mathbb{R}^n$  jest wektorem szukanych prądów zaś wektor  $b \in \mathbb{R}^m$  definiuje zadane pole magnetyczne. W przypadku optymalizacji kształtu cewki zależność pomiędzy szukаныmi zmiennymi a polem magnetycznym jest nieliniowa.

## Funkcja celu

W celu sformułowania problemu syntezy pola jako zadania optymalizacyjnego zdefiniowano funkcję celu:

$$f(x) = \|b(x) - b_{\text{req}}\|_2^2 \quad (1)$$

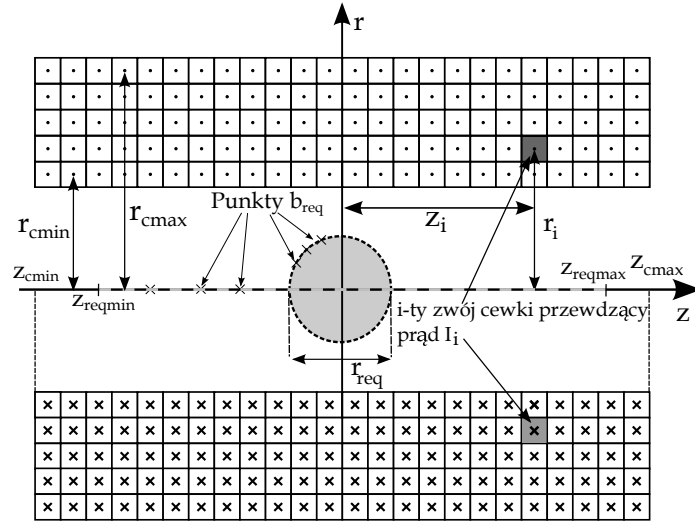
gdzie  $\|\cdot\|_2$  jest normą euklidesową w przestrzeni  $\mathbb{R}^m$ . Tak określona funkcja celu pozwala na porównanie otrzymanego wyniku (pole  $b(x)$ ) z polem zadany (  $b_{\text{req}}$  ). Rozwiązanie problemu optymalizacji polega na znalezieniu minimum globalnego funkcji celu. W przypadku stosowania metod gradientowych wygodne było użycie kwadratu normy euklidesowej  $\|\cdot\|_2$  z uwagi na gładkość tej funkcji.

Tak zdefiniowana funkcja celu została poddana optymalizacji. W przypadku liniowym problem optymalizacji staje się zagadnieniem najmniejszych kwadratów. W pracy zostały przeanalizowane zarówno przypadki problemów optymalizacji bez ograniczeń jak i z ograniczeniami. W przypadku liniowym ograniczenia sprowadzały się do założenia, aby prądy płynęły w jednym kierunku (np.  $x_k \geq 0$ ) lub żeby wartości prądów nie przekraczały pewnej wartości maksymalnej ( $|x_k| \leq x_{\text{max}}$ ), natomiast w przypadku optymalizacji kształtu cewki ograniczenie stanowiły wymiary maksymalne i minimalne cewki.

## 3 Optymalizacja rozkładu prądu w cewce

Na rys. 1 przedstawiono przekrój poprzeczny cewki walcowej. Obszar w którym kształtuje się pole magnetyczne reprezentuje wektor  $b_{\text{req}}$ . W przypadku problemów analizowanych w pracy był to odcinek zlokalizowany na osi  $z$  układu współrzędnych oraz kula zlokalizowana w środku układu współrzędnych. Problem polegał na znalezieniu takiego rozkładu prądu w poszczególnych zwojach, który minimalizuje funkcję celu.

W przypadku optymalizacji bez ograniczeń, mamy do czynienia ze standardowym zagadnieniem najmniejszych kwadratów. W celu zminimalizowania błędów obliczeń spowodowanych złym uwarunkowaniem macierzy  $A$  do rozwiązywania zadania najmniejszych kwadratów zastosowano rozkład  $QR$



Rys. 1: Przekrój poprzeczny cewki walcowej składającej się z pojedynczych zwojów oraz obszaru w którym kształtowane jest pole magnetyczne reprezentowane przez wektor  $b_{req}$ .

macierzy. W przypadku problemów bez ograniczeń w rozwiązaniach pojawiają się bardzo duże wartości natężenia prądów. Dodatkowo prądy te mają często przeciwny kierunek w poszczególnych uzwojeniach. Takie własności rozwiązań powodują ich bezużyteczność ze względu na zastosowania praktyczne. W związku z tym zastosowano metody, które pozwalają ograniczyć wartości prądów w uzwojeniach oraz ewentualnie wymuszają jeden kierunek przepływu prądów. Zastosowano metody regularyzacyjne (modyfikacja funkcji celu) lub metody optymalizacji z ograniczeniami: nieujemną metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę programowania kwadratowego z ograniczeniami kosztowymi.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wywnioskowano, że zastosowanie metody programowania kwadratowego dla problemów syntezy jest zasadne. Metoda ta umożliwia ograniczenie wartości prądów w uzwojeniach zarówno "z dołu" jak i "od góry". Podobne efekty otrzymujemy wykorzystując metodę regularyzacji Tichonowa, gdzie jednak nie ma możliwości bezpośredniego zadania ograniczenia "od góry". Rozwiązania uzyskane metodą programowania kwadratowego z ograniczeniami kosztowymi charakteryzują się mniejszą wartością funkcji celu, oraz mniejszą zmiennością (mniejszą liczbą wartości prądów potrzebnych do ich zrealizowania). Ta własność rozwiązań jest szczególnie ważna w kontekście możliwych zastosowań.

Spośród metod, w których zastosowano ograniczenie wartości prądów, metoda regularyzacji daje najgorsze wyniki pod względem dostosowania pola otrzymanego do pola zadanego. Jest to efektem wymuszenia ograniczeń na rozwiązanie przez modyfikację funkcji celu. Takie podejście prowadzi do roz-

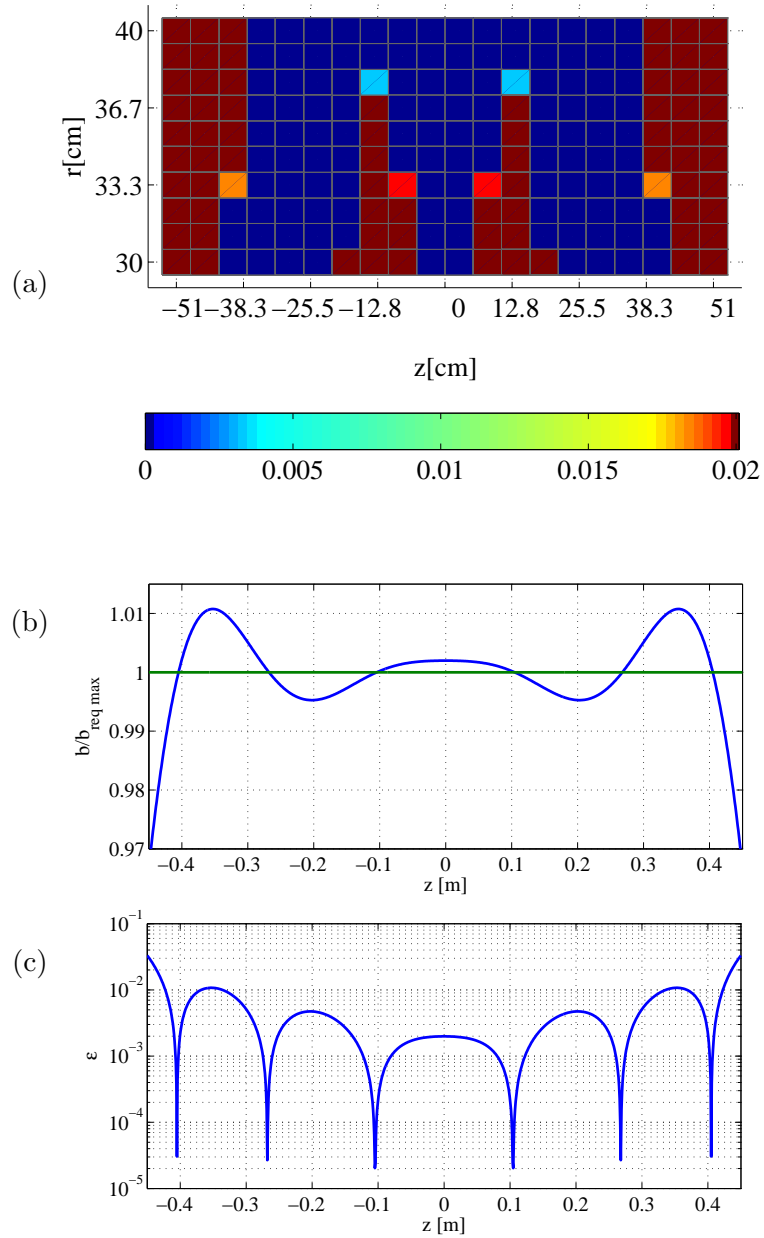
wiązań suboptymalnych. Metodę regularyzacji przewyższa metoda programowania kwadratowego z ograniczeniami. Rozwiązania znalezione za pomocą tej metody są zawsze lepsze (w sensie minimalizacji funkcji celu) niż rozwiązania uzyskane metodą regularyzacji z tak dobranym współczynnikiem regularyzacji, aby rozwiązania były nieujemne, mimo że prąd maksymalny ma taką samą wartość dla metody regularyzacji. Przykładowe rozwiązanie optymalne znalezione metodą programowania kwadratowego z ograniczeniami zostało przedstawione na rys. 2. Poszukiwany był wektor prądów o wymiarze  $n = 200$ , dla którego wyznaczono indukcję pola magnetycznego w 1000 punktach zlokalizowanych na osi układu współrzędnych.

W pracy dokonano również analizy innych metod optymalizacji takich jak metoda quasi-Newtona, metoda sympleksu Neldera–Meada oraz algorytmów genetycznych. Metody bezpośrednio korzystające z algebry liniowej w znaczny sposób przewyższają inne testowane metody, które wymagają wielokrotnego wyznaczenia funkcji celu. Na przykład metoda Neldera–Meada dla przypadku  $n = 12$  wymagała wyznaczenia funkcji celu prawie  $9 \cdot 10^8$  razy i znalazła rozwiązanie  $9 \cdot 10^5$  razy gorsze od rozwiązania dokładnego. Jedyną metodą, która do wymiaru ok.  $n = 20$  potrafiła znaleźć rozwiązanie bliskie dokładnemu jest metoda quasi-Newtona. Natomiast w przypadku metody rozkładu  $QR$  rozwiązania równania normalnego obliczenia można prowadzić do wymiaru ok.  $n = 50$  uzyskując stabilne i symetryczne rozwiązania. Dla problemów z ograniczeniami zastosowanie metod NNLSQ, regularyzacji i programowania kwadratowego prowadziło do uzyskania stabilnych rozwiązań również dla znacznie większego wymiaru problemu. Przy zastosowaniu tych metod rozwiązanie problemu o wymiarze  $n = 1000$  można uzyskać w czasie kilku sekund. Uzyskanie takich wyników jest możliwe dzięki zastosowaniu metody zbiorów aktywnych, która znacznie ogranicza przestrzeń poszukiwań potencjalnych rozwiązań, a co za tym idzie czas obliczeń. W związku z ograniczeniami opisanymi powyżej zrezygnowano z testowania innych metod w przypadku problemów z ograniczeniami.

W pracy dokonano również analizy możliwości generowania niejednorodnego pola magnetycznego. Wykazano, że metody bezpośrednio korzystające z algebry liniowej przewyższają inne metody również w przypadku pól niejednorodnych.

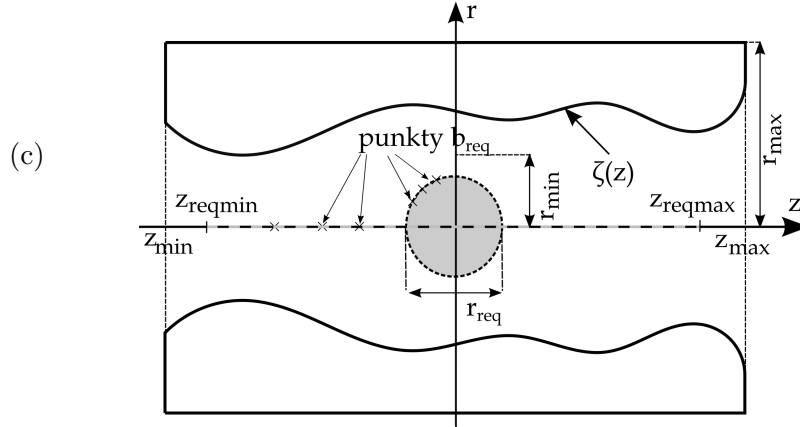
## 4 Optymalizacja kształtu cewki

Na rys. 3 przedstawiono przekrój poprzeczny cewki w walcowym układzie współrzędnych. Cewka ograniczona jest od góry powierzchnią walcową, natomiast od wewnątrz krzywą obrotową opisaną funkcją  $\zeta(z)$ . Zakłada się, że wartość gęstości prądu na całej powierzchni przekroju jest stała i wynosi  $j$ . Długość cewki wynosi  $z_c = z_{\max} - z_{\min}$ , natomiast zewnętrzny promień wynosi  $r_{\max}$ . Rozważano zagadnienie znalezienia funkcji  $\zeta(z)$ , która definiuje



Rys. 2: Rozkład prądów (a) oraz odpowiadający im rozkład pola magnetycznego (b) na na osi układu współrzędnych dla problemu 2D o wymiarze  $w \times k \times m = 20 \times 10 \times 1000$  znalezione metodą programowania kwadratowego z ograniczeniami kostkowymi. (c) rozkład błędu względnego rozwiązania.

wewnętrzny kształt cewki na całej jej długości, tak aby otrzymać wymagany rozkład pola magnetycznego w zadanym obszarze. Zakłada się, że wartości funkcji  $\zeta$  są ograniczone do przedziału  $[r_{\min}, r_{\max}]$ .

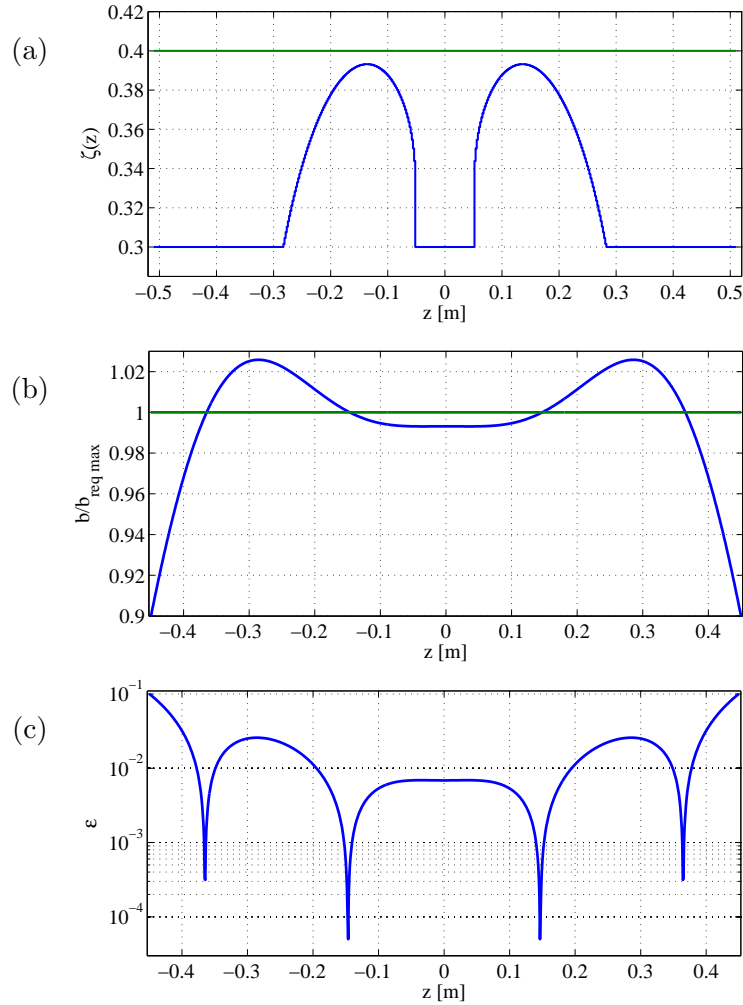


Rys. 3: Przekrój poprzeczny cewki w walcowym układzie współrzędnych walcowych, kształtowanej przez krzywą obrotową  $\zeta$ .

Ponieważ, pole magnetyczne zależy w sposób nieliniowy od kształtu uzwojenia należy zastosować metody optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami. Ograniczenia te wynikają bezpośrednio z geometrii cewki. W pracy dokonano analizy metod gradientowych oraz metod heurystycznych. W pracy analizowano dwa przypadki to jest gdy pole generowane było na osi symetrii cewki oraz na kuli umiejscowionej w początku układu współrzędnych. Wśród metod gradientowych zastosowano metodę quasi-Newtona oraz nieliniową metodę najmniejszych kwadratów. Wykazano, że metoda quasi-Newtona daje najlepsze rozwiązania. Wyniki uzyskane za pomocą metod heurystycznych znacznie odbiegały od wyników uzyskanych za pomocą metod gradientowych. Jedynie metody deterministyczne rozwiązywały problem w relatywnie krótkim czasie.

W przypadku problemu na osi wykorzystano analityczny wzór na pole magnetyczne. Dzięki temu wyznaczenie wartości funkcji celu było dość szybkie, co w efekcie umożliwia znalezienie rozwiązań dla przypadku  $n \times m = 512 \times 1000$  dla gęstości prądu  $j = 17 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ . Rozwiązanie to otrzymano metodą quasi-Newtona z ograniczeniami kostkowymi. Wykorzystano metodę iteracyjnego podwajania wymiaru. Algorytm rozpoczął działanie dla problemu  $n \times m = 32 \times 100$ . Następnie wymiar  $n$  problemu został zwiększony dwukrotnie, natomiast algorytm startował już z punktu, który był rozwiązaniem problemu poprzedniego. W sumie algorytm wywołał funkcję celu ok. 31000 razy w czasie ok. 10 min. Rys. 4(c) przedstawia rozkład błędu względnego rozwiązania. Średni błąd względny wynosi 1.8%, zaś błąd

maksymalny jest mniejszy niż 10%. Wynik jest symetryczny, co sugeruje, że znalezione rozwiązanie jest minimum globalnym.



Rys. 4: Rozwiązanie problemu o wymiarze  $n \times m = 512 \times 1000$  znalezione za pomocą metody quasi-Newtona z wykorzystaniem metody iteracyjnego podwajania wymiaru. (a) kształt cewki, (b) rozkład pola magnetycznego dla obszaru stanowiącego odcinek, (c) rozkład błędu względnego,  $j = 17 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ .

W przypadku gdy pole magnetyczne kształtowane było na kuli umiejscowionej w początku układu współrzędnych, należało wyznaczyć numerycznie całki podwójne z funkcji, która zawiera całki eliptyczne. Zwiększyła to znacznie czas obliczenia wartości funkcji celu. W konsekwencji uniemożliwiło to wyznaczenie rozwiązania dla dużych wartości  $n$  i  $m$ . Przeprowadzono testy z wykorzystaniem metody quasi-Newtona oraz nieliniowej metody najmniej-



szych kwadratów. Rys. 5 przedstawia przykładowe rozwiązanie problemu o wymiarze  $n \times m = 64 \times 100$  przy założeniu, że gęstość prądu wynosi  $j = 17 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ . Przedstawione rozwiązanie otrzymano metodą iterowanego podwajania wymiaru rozwiązując kolejno problemy o wymiarach  $8 \times 12$ ,  $16 \times 20$ ,  $32 \times 100$  oraz  $64 \times 100$ . Całkowity czas potrzebny do rozwiązania problemu wyniósł ok. 17 godzin. Algorytm wywołał funkcję celu 5715 razy. Rozwiązanie jest symetryczne.

Dokonano również możliwości kształtowania pola niejednorodnego. Potwierdzono, że również dla pola niejednorodnego algorytmy deterministyczne z sukcesem znajdują rozwiązania.

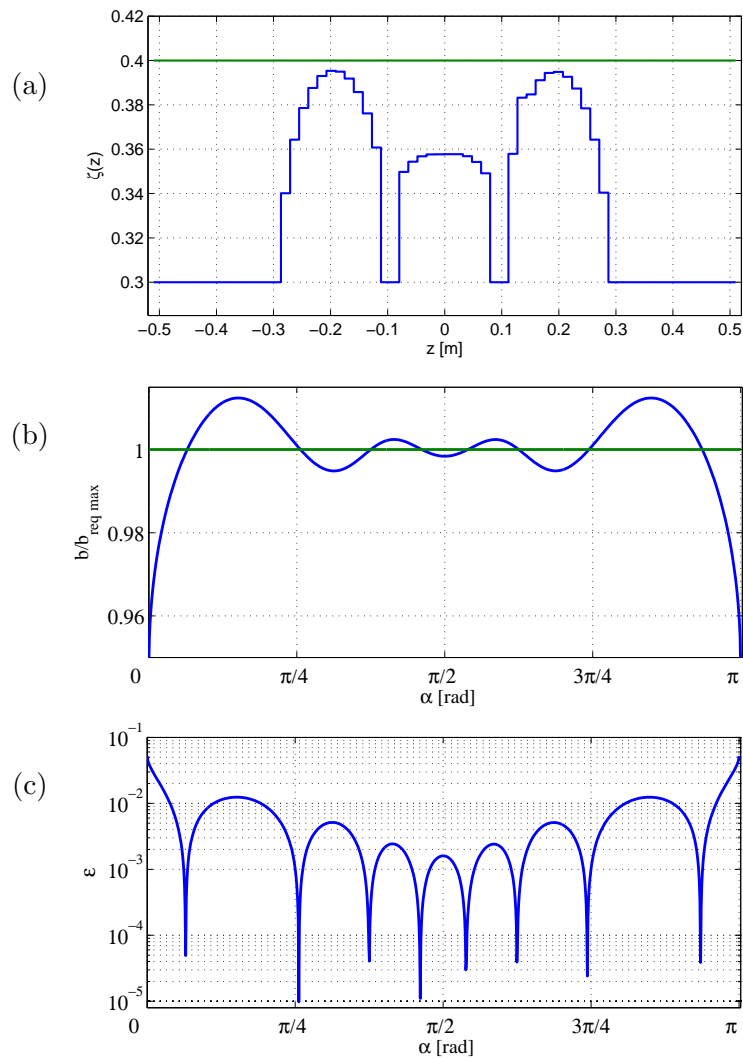
## 5 Analiza rzeczywistej cewki

W pracy dokonano analizy cewki zbudowanej w warsztacie Wydziału EAIIB (dawniej EAIIE) Akademii Górniczo-Hutniczej, na podstawie projektu wykonanego przez autora (rys. 6). Projekt ten był wynikiem początkowej fazy pracy badawczej autora nad problemem syntezy pola magnetycznego z wykorzystaniem algorytmów genetycznych. W pracy wskazano, że przedstawiona cewka nie jest cewką optymalną i wykorzystując metodę quasi-Newtona można zaprojektować cewkę o mniejszym przekroju, wytwarzającą pole magnetyczne jednorodne z mniejszym błędem.

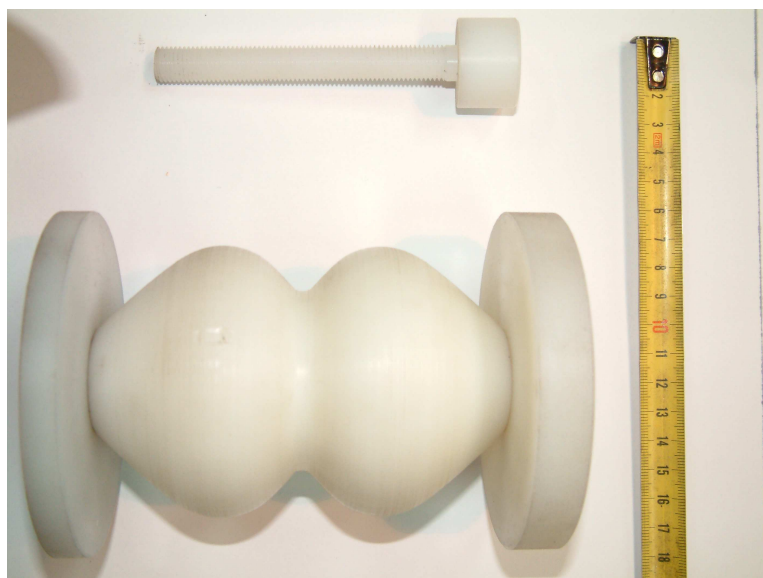
## 6 Podsumowanie i wnioski

W dysertacji dokonano analizy problemu syntezy pola magnetycznego wewnątrz cewki powietrznej. Dokonano analizy problemu w dwóch przypadkach. W pierwszym przypadku kształtowanie pola magnetycznego odbywało się za pomocą zmiany rozkładu prądów w pojedynczych cewkach uzwojenia o ustalonym położeniu. Taki przypadek nazwano przypadkiem liniowym. W drugim przypadku analizowano problem kształtowania pola magnetycznego za pomocą zmiany kształtu uzwojenia cewki zakładając stałą gęstość prądu w uzwojeniu. Przypadek ten nazwano nieliniowym. Problem syntezy pola przedstawiono jako problem optymalizacyjny. Zdefiniowano funkcję celu, którą następnie poddano optymalizacji. Przedstawiono porównanie wielu metod optymalizacyjnych. Na podstawie uzyskanych wyników wyciągnięto następujące wnioski:

- ✓ Rozwiązanie problemu najmniejszych kwadratów bez ograniczeń dla kształtowania pola w cewce jest stabilne numerycznie dla wymiaru  $n \leq 50$ . W przypadku gdy wymiar jest większy rozwiązania są niesymetryczne, oraz wartości prądów rosną do bardzo dużych wartości. Szczególną własnością rozwiązań jest istnienie prądów o dużych wartościach płynących w przeciwnych kierunkach.



Rys. 5: Rozwiązanie problemu o wymiarze  $n \times m = 64 \times 100$  znalezione za pomocą metody quasi-Newtona z wykorzystaniem metody iteracyjnego podwajania wymiaru. (a) kształt cewki, (b) rozkład pola magnetycznego dla obszaru będącego kulą.



Rys. 6: Fotografia przedstawiająca korpus cewki wykonanej w warsztacie Wydziału EAIiB (dawniej EAIiE) Akademii Górniczo-Hutniczej.

- ✓ W celu “ustabilizowania” rozwiązania problemu liniowego oraz spełnienia wymagań praktycznych należy nałożyć na rozwiązanie ograniczenia. Jedną z możliwości jest zastosowanie metody regularyzacji Tichonowa z tak dobraną wartością parametru regularyzacji, aby wymusić jednolity kierunek przepływu prądu w uzwojeniach. Wykorzystując metodę regularyzacji otrzymujemy gładkie i stabilne rozwiązania. Alternatywnym rozwiązaniem jest zastosowanie nieujemnej metody najmniejszych kwadratów, która pozwala otrzymać rozwiązania stabilne nawet dla bardzo dużych wymiarów problemu. Wykorzystany algorytm Lawsona i Hansona oparty na metodzie zbiorów aktywnych jest algorytmem bardzo skutecznym. Uzyskane rozwiązania wskazują, że najlepsze efekty kształtowania pola magnetycznego w cewce osiąga się, gdy wykorzystuje się tylko kilka odpowiednio zlokalizowanych pojedynczych uzwojeń. Dzięki wykorzystaniu algorytmu programowania kwadratowego z ograniczeniami kostkowymi możemy, oprócz gwarancji otrzymania jednakowego kierunku przepływu prądu, ograniczyć maksymalną wartość prądu. Wykorzystana metoda zbiorów aktywnych, dzięki niewielkiemu wymiarowi zbioru pasywnego pozwala na rozwiązanie problemów wysokowymiarowych,
- ✓ Stworzony toolbox w środowisku Matlab<sup>®</sup> umożliwia szybką analizę problemów kształtowania pola magnetycznego. Mimo, że w pracy położono nacisk na otrzymywanie pola jednorodnego, stworzone narzędzie umożliwia wyznaczanie rozkładu prądów dla dowolnego rozkładu

pola magnetycznego w zadanym obszarze.

- ✓ Metody niedeterministyczne oparte na stochastycznym przeszukiwaniu przestrzeni potencjalnych rozwiązań nie prowadzą do zadowalających rozwiązań problemów syntezy pola magnetycznego, szczególnie dla problemów o większym wymiarze. Wymagają one dużego nakładu obliczeń i mimo to nie pozwalają otrzymać rezultatów podobnych do wyników otrzymanych metodą programowania kwadratowego czy nieujemną metodą najmniejszych kwadratów.
- ✓ Rozwiązanie problemu kształtowania pola magnetycznego za pomocą zmiany kształtu uzwojenia przy ustalonej gęstości prądu w uzwojeniu jest dużo bardziej złożone obliczeniowo. Wynika to z faktu nieliniowej zależności pomiędzy położeniem przewodu a wygenerowanym przez nie polem magnetycznym. Zaproponowana funkcja celu, dzięki gładkości pozwala wykorzystać metody gradientowe. Metoda quasi-Newtona okazała się metodą najbardziej skuteczną.
- ✓ Kształtowanie pola magnetycznego na osi  $z$  cewki jest zadaniem prostszym, ze względu na istniejące zależności analityczne. Gdy pole jest kształtowane poza osią, należy wyliczać numerycznie całki powierzchniowe, w których funkcja podcałkowa zawiera całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju. Fakt ten powoduje, że do rozwiązania problemu optymalizacji wymagana jest znacznie większa moc obliczeniowa.
- ✓ Zaproponowana metoda iteracyjnego podwajania wymiaru pozwala w znaczny sposób skrócić czas obliczeń i otrzymać lepsze wyniki, tzn. obarczone mniejszymi błędami.
- ✓ Metoda aktywnych zbiorów zarówno dla problemów liniowych i nieliniowych prowadzi w praktyce do redukcji wymiaru problemu, co w konsekwencji znacznie przyspiesza czas obliczeń.
- ✓ Zastosowane metody dają znacznie lepsze wyniki niż metoda hybrydowa łącząca algorytmy ewolucyjne oraz metodę elementów skończonych. Zostało to wykazane przez porównanie wyników otrzymanych dla cewki rzeczywistej zaprojektowanej metodą hybrydową oraz wyników otrzymanych za pomocą metody quasi-Newtona. Należy podkreślić, że algorytmy rozważane w niniejszej pracy mogą być stosowane wyłącznie w przypadku środowisk magnetycznie liniowych, natomiast użycie metody elementów skończonych pozwala na kształtowanie pola w dowolnych środowiskach.

W ramach prac badawczych związanych z powstaniem niniejszej dysertacji autor zrealizował następujące zadania:

- ✓ Zdefiniował funkcje celu dla problemu liniowego i nieliniowego. W ten sposób przedstawił problem syntezy pola magnetycznego jako problem optymalizacyjny.
- ✓ Zdefiniował wielkości, które pozwalają na ocenę uzyskanych rozwiązań z praktycznego punktu widzenia.
- ✓ Przeanalizował możliwości rozwiązania problemów syntezy pola magnetycznego zarówno dla zadanych pól jednorodnych jak i niejednorodnych.
- ✓ Zaimplementował i przeanalizował wiele metod optymalizacji zarówno deterministycznych jak i stochastycznych oraz wskazał najlepiej działające metody. Analiza działania tych metod dokonana była na kilkuset przykładach.
- ✓ Przeprowadził analizę możliwości metody krzywej L wyboru parametru regularyzacji w metodzie regularyzacji Tichonowa i wykazał, że metoda ta nie daje zadowalających rezultatów dla rozważanych problemów. Zaproponował własną metodę doboru parametru regularyzacji i pokazał na przykładach jej skuteczność.
- ✓ Zaproponował metodę iteracyjnego podwajania wymiaru, co pozwoliło na przyspieszenie obliczeń w przypadku optymalizacji kształtu cewki.
- ✓ Skonstruował cewkę według własnego projektu. Dokonał pomiarów pola magnetycznego i porównał z wynikami otrzymanymi za pomocą metod użytych w niniejszej pracy.
- ✓ Dokonał przeglądu literatury.

Na podstawie powyższych wniosków autor stwierdza, że postawiony cel pracy został spełniony. Porównano wiele metod obliczeniowych ze względu na jakość rozwiązania i złożoność obliczeniową. Postawiona teza pracy została pozytywnie zweryfikowana. Wykazano, że metody programowania kwadratowego z ograniczeniami kosztowymi dla problemu liniowego oraz metoda quasi-Newtona dla problemu optymalizacji kształtu cewki znacznie przewyższają inne metody deterministyczne oraz metody stochastyczne, często stosowane do rozwiązania problemów syntezy pola magnetycznego.