AKADEMIA GÓRNICZO – HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
KRAKÓW, POLAND

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej
KATEDRA AUTOMATYKI i INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ
Faculty of Electrical Engineering, Automatics, Computer Science and Biomedical Engineering
CHAIR OF AUTOMATIC CONTROL AND BIOMEDICAL ENGINEERING

Omer S.M. Jomah

Autoreferat rozprawy doktorskiej pt.

Global Optimization Methods for Solving Multicriteria Optimal Control Problems

(„Metody optymalizacji globalnej w rozwiązywaniu wielokryterialnych problemów sterowania optymalnego")

Promotor:
prof. nz. dr hab. inż. Andrzej M.J. Skulimowski

Kraków, wrzesień 2012

Streszczenie. Rozprawa dotyczy zastosowania bezgradientowych algorytmów optymalizacji statycznej do znajdowania niezdominowanych sterowań w liniowych systemach sterowania. Rozprawa zawiera osiem rozdziałów, w tym wstęp i wnioski końcowe. Do pracy dołączony został kod oprogramowania do obliczeń numerycznych wykonanego w środowisku Matlab. W rozdz. 2-4.przedstawiono podstawy matematyczne stosowanych metod, wstęp do teorii optymalizacji wielokryterialnej oraz do algorytmów populacyjnych. W rozdz. 5 przeprowadzono analizę własności wybranej klasy algorytmów oraz zastosowano dwupoziomową metodę optymalizacji do wyboru optymalnych parametrów procedury Neldera-Meada. Rozdz. 6 zawiera opis dwóch nowych metod optymalizacji nieróżniczkowalnej, które mogą być zastosowane do rozwiązywania zdyskretyzowanych problemów sterowania optymalnego równań różniczkowych zwyczajnych. Jedną z nich jest dyskretny wariant algorytmu Neldera-Meada działający na kompleksach symplicjalnych w przestrzeni sterowań. Następnie zaproponowano hybrydowy wariant tej metody, w którym następuje przełączenie do wariantu dyskretnego po wykonaniu pewnej ilości kroków metody klasycznej. Dla zaproponowanych procedur przeprowadzono serię eksperymentów numerycznych w środowisku MATLAB. Rozdz. 7 pracy zawiera opis zastosowania opracowanych metod optymalizacji do wielokryterialnego sterowania systemem zaopatrzenia w wodę pitną w Libii.

Wprowadzenie.

Głównym celem niniejszej rozprawy było wykazanie następujących trzech tez:

1. Algorytm Neldera-Meada (N-M) dla optymalizacji nieróżniczkowalnej może być uogólniony przy użyciu metod topologii algebraicznej, zwłaszcza teorii kompleksów symplicjalnych, w wyniku czego powstaje kooperujący system procesów optymalizacji globalnej naśladujący procesy ewolucyjne, lecz posiadający ścisłe własności matematyczne. Dla wybranych klas problemów uogólniony algorytm jest zbieżny do globalnego minimum.

2. Idea kooperacyjnych procesów optymalizacji, wyprowadzona na podstawie algorytmu Neldera-Meada, może być dalej uogólniona dla celów rozwiązywania globalnych problemów optymalizacji wielokryterialnej. Dla wybranych klas problemów algorytm ten znajduje wszystkie lokalne minima Pareto.

3. Wielokryterialne problemy sterowania optymalnego dla problemów opisywanych wybranymi typami równań różniczkowych zwyczajnych (liniowych stacjonarnych, z rozdzielonymi zmiennymi i nieliniowych lokalnie linearyzowalnych) po dyskretyzacji czasu mogą być rozwiązywane przy użyciu sekwencyjnego rozszerzenia globalnego wielokryterialnego algorytmu Neldera-Meada.

Powyższy cel został osiągnięty i opisany w dysertacji.

W Rozdziałach 2-5 podano podstawy matematyczne i obliczeniowe przedstawionego w rozprawie podejścia. W Rozdz. 3 przedstawiamy klasyczną metodę Neldera-Meada i jej optymalne parametry, wykorzystując zbiór funkcji testowych. Ta metoda, stworzona przez Neldera i Meada [15] jest prostym i eleganckim sposobem na określenie minimum funkcji wielu zmiennych. Podstawowe operacje algorytmu (odbicie, ekspansja, kontrakcja, kurczenie) zostały zoptymalizowane dla zbioru standardowych funkcji testujących. Dzięki zaproponowanej w Rozdziale 3 modyfikacji parametrów, algorytm staje się szybciej zbieżny i dokładniejszy. W tym sformułowaniu zastosowano kilka dalszych modyfikacji, upraszczających proces znajdowania minimum poprzez algorytm. Jednoczesne wyznaczanie optimów kilku funkcji skalarnych wydaje się być jednym z możliwych zastosowań. Po uruchomieniu algorytmu z dwoma kryteriami algorytm określa optymalne wartości i argumenty minimum dla obu kryteriów. W Rozdz. 3 przedstawiliśmy też rezultaty testów obliczeniowych, które dowodzą, że metoda jest efektywna.

W Rozdziale 4 przedstawiliśmy metody globalnej optymalizacji, które mogą być zastosowane do rozwiązywania globalnych problemów sterowania optymalnego, co jest głównym celem niniejszej rozprawy. W nawiązaniu do rezultatów poprzedniego Rozdziału 3, szczególną uwagę poświęcamy bezpośrednim metodom poszukiwania (*direct search methods*), szczególnie algorytmowi Neldera-Meada, który został wybrany jako najbardziej odpowiedni do rozwiązywania zdyskretyzowanych problemów sterowania. Następnie proponujemy metodę optymalizowania parametrów algorytmu Neldera-Meada, poprzez zmniejszanie liczby kroków koniecznych do osiągnięcia punktu bliskiego optimum dla kombinacji liniowej rodziny funkcji testowych. Parametry są optymalizowane w $\mathbb{R}^4$, stosując tę samą metodę Neldera-Meada.

W Rozdziale 5 przedstawiamy metodę ewolucji różniczkowej (*differential evolution*, DE), która posiada pewne związki z metodą Neldera-Meada i może służyć jako benchmark dla nowych algorytmów bazujących na algorytmie Neldera-Meada opisanych w rozprawie. Działanie metody polega na optymalizowaniu problemu poprzez wielokrotne próby poprawienia rozwiązania kandydata z uwzględnieniem danej miary jakości [5]. DE jest stosowana dla wielowymiarowych funkcji rzeczywistych, ale tak, jak metoda Neldera-Meada nie wykorzystuje gradientu optymalizowanego problemu, co oznacza, że DE nie wymaga różniczkowalnego problemu optymalizacji. Jednakże, metaheurystyki takie jak DE nie gwarantują znalezienia optymalnego lub nawet prawie optymalnego rozwiązania.

W Rozdziale 6 opracowano i opisano nowe metody optymalizacji dyskretnej oraz hybrydowej dyskretno-ciągłej oparte na schemacie Neldera-Meada. Opracowane algorytmy zastosowano w Rozdziale 7 do rozwiązywania wielokryterialnego problemu optymalnego sterowania systemem zaopatrzenia w wodę w Libii. Klasyczny i dobrze znany algorytm Neldera-Meada został zmodyfikowany w taki sposób, by mógł być zastosowany do rozwiązywania zdyskretyzowanych problemów sterowania optymalnego. Przypomnijmy, że wykorzystuje on liniowo niezależnych $N+1$ punktów startowych w N-wymiarowej przestrzeni decyzyjnej, Stąd inna nazwa algorytmu: sympleksowa metoda spadku. Zbadaliśmy też kombinatoryczne właściwości uogólnionego algorytmu optymalizacji, opartego na pomyśle Neldera i Meada. W oparciu o [18] badamy procedurę typu Neldera-Meada, dla której początkowym obiektem jest kompleks symplicjalny S w odróżnieniu od sympleksu w metodzie klasycznej. Modyfikację tę przyjęto, by umożliwić przetwarzanie równoległych procesów poszukiwania rozwiązania. Procedura ta może być zastosowana jako kombinatoryczne wyszukiwanie dyskretnego zbioru wierzchołków wszystkich sympleksów z kompleksu S. Proponujemy strukturę algebraiczną, która opisuje zminimalizowane działanie tego algorytmu dla danej funkcji f oraz dowodzi pewnych własności opisanej klasy algorytmów.

W następnym Rozdziale 7 algorytmy opracowane w Rozdziale 6 zostały zastosowane do rozwiązywania wielokryterialnych problemów optymalnego sterowania, związanych z dostarczaniem wody pitnej w Libii. Ostatni Rozdział 8 zawiera wnioski i projekty dalszych prac badawczych.

Optymalizacja parametrów algorytmu Neldera-Meada

W Rozdz. 3 rozprawy dokonaliśmy wyboru parametrów podstawowych czterech operacji algorytmu Neldera-Meada, a mianowicie:

- Odbicie punktu P_h względem S_r z parametrem a

$$P^* = (1 + a)S_r - aP_h$$

- Ekspansja punktu P^* across S_r z parametrem b

$$P^{**} = (1 + b)P^* - \mathrm{b}S_r$$

- Kontrakcja punktu P_h względem S_r z parametrem c

$$P^{***} = \mathrm{c}P_h + (1 - c)S_r$$

- Proporcjonalne zmniejszanie rozmiaru (kurczenie) sympleksu względem punktu S_r z parametrem d

$$P^{****} = P^* - \mathrm{d}(P^* - S_r)$$

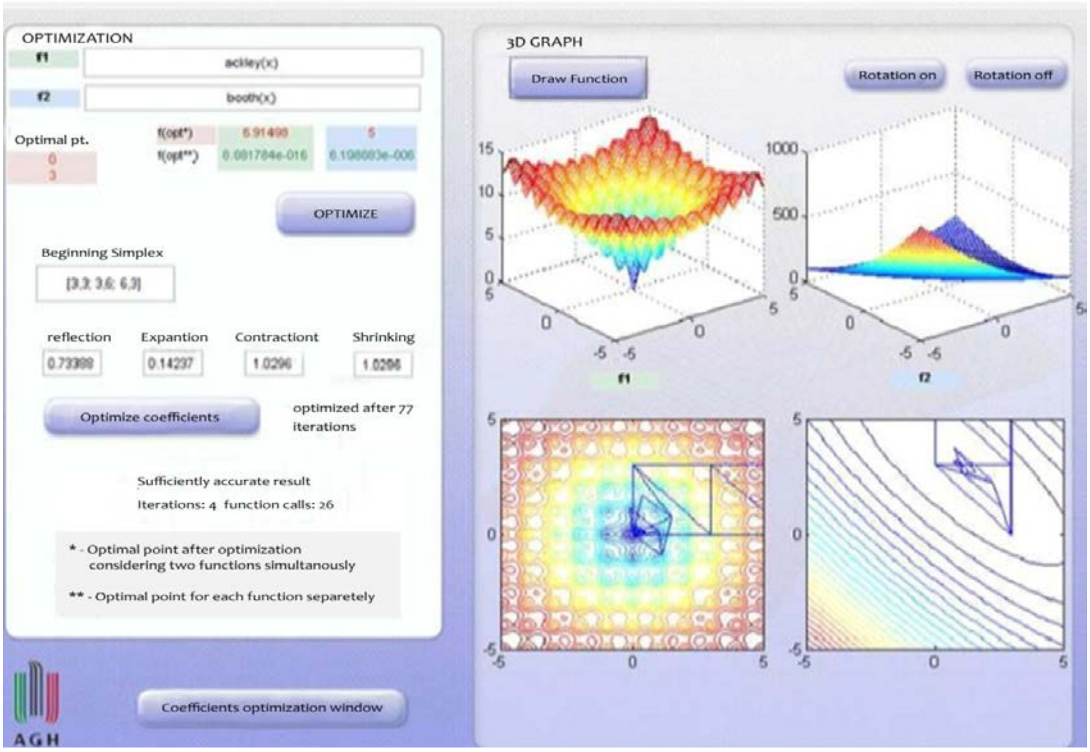
Idea optymalizacji parametrów metody N-M polega na optymalizacji funkcji dokładności (tj. różnicy pomiędzy znanym optimum funkcji testującej, a uzyskaną wartością) dla określonej z góry liczby kroków algorytmu N-M dla tego samego sympleksu startowego, którego wierzchołki są różnymi wartościami parametrów N-M. Jeden z wierzchołków odpowiadał zawsze klasycznemu zestawowi parametrów metody N-M, tj. (1, 2, 0,5, 0,5).

Zastosowaliśmy następujące funkcje testujące:

Tabela 1. Funkcje testujące

Lp.	Nazwa funkcji testującej	Równanie funkcji
1.	Ackley	$f(x) = 20 + e - 20e^{1/5\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} - e^{\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n} cos\, 2\pi x_i}.$
2.	Beale	$f(x) = (1.5 - x_1 + x_1x_2)^2 + (2.25 - x_1 + x_1x_2^2)^2 + (2.625 - x_1 + x_1x_2^3)^2.$
3.	Bohachevsky	$f_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3cos\,(3\pi x_1) - 0.4cos\,(4\pi x_2) + 0.7,$ $f_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3cos\,(3\pi x_1)cos\,(4\pi x_2) + 0.3,$ $f_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3cos\,(3\pi x_1 + 4\pi x_2) + 0.3.$
4.	Booth	$f(x) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2.$
5.	Griewank	$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^{n} \cos({x_i}/{\sqrt{i}}) + 1$

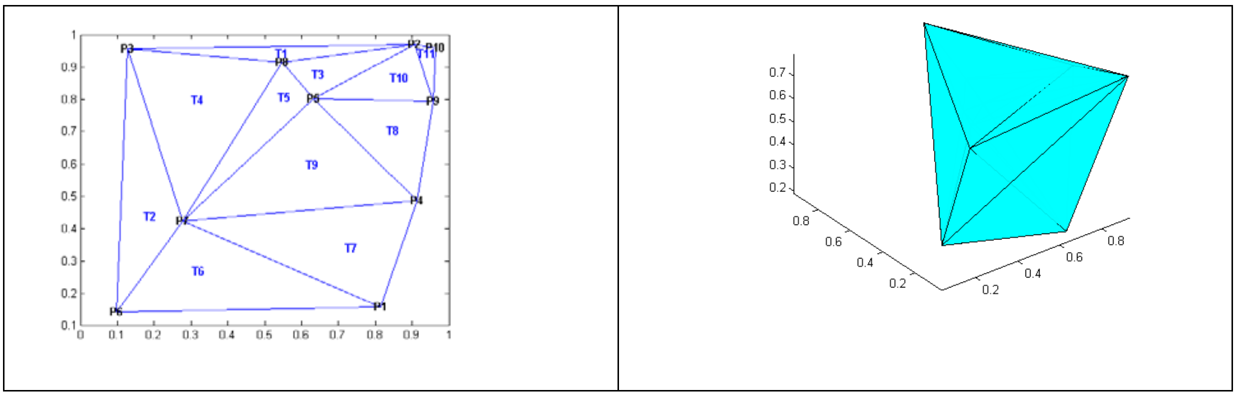
Rys.1. *Główne okno aplikacji do obliczania optymalnych parametrów metody N-M*



Dyskretny Algorytm Neldera-Meada

W Rozdz.6, w oparciu o idee podane w [18], zbadaliśmy własności zmodyfikowanej procedury opartej o algorytm Neldera-Meada, dla której początkowym obiektem jest kompleks symplicjalny *S*, w odróżnieniu od sympleksu w metodzie klasycznej. To podejście pozwala na przetwarzanie wielu równoległych procesów poszukiwania rozwiązania opartych o sympleksy z S, które mogą wymieniać informacje. W niniejszej rozprawie idea ta została zastosowana w kombinatorycznym algorytmie poszukującym optymalnego rozwiązania na zbiorze dyskretnym *E*, który – po wykonaniu triangulacji Delaunay'a- utożsamiamy ze zbiorem wszystkich wierzchołków kompleksu symplicjalnego *S*. Zaproponowaliśmy odpowiednią strukturę algebraiczną, która opisuje działania takich algorytmów. i zbadaliśmy jej własności.

Rys. 2. *Triangulacja Delaunay'a na płaszczyźnie (a) i w przestrzeni trójwymiarowej (b)*



a) b)

Procedura ta została następnie zastosowana to znajdowania sterowań w podwójnie zdyskretyzowanym (czas i wartości sterowań) problemie wielokryterialnego sterowania optymalnego. W Tab. 1 znajduje się porównanie metod: klasycznej i dyskretnego algorytmu Neldera-Meada

Tabela 1. *Porównanie klasycznego i dyskretnego algorytmu Neldera-Meada-*

Zasadnicze kroki algorytmu Neldera-Meada	Ciągłe algorytmy typu Neldera-Meada	Kombinatoryczne algorytmy typu Neldera-Meada
Definicja dziedziny optymalizacji	*Algorytmy te mogą występować zarówno w wersji bez ograniczeń (klasycznej) lub dla problemów z ograniczeniami*	*Algorytmy mogą być wykonywane na dyskretnych podzbiorach E dla IR^n – zwykle zanurzenia w IR^n konkretnego zbioru U. Zakładamy, że dim(E) =n*
Definicja punktów startowych	*N+1 punktów startowych w N-wymiarowej przestrzeni musi być liniowo niezależne, są one definiowane na podstawie doświadczenia*	*Dowolny zbiór $E_1 \subset E$ składający się z przynajmniej n+1 punktów jest definiowany w oparciu o doświadczenie lub losowo. Lokalna triangulacja (np. Delaunay'a) wokół E_1 dostarcza początkowej rodziny sympleksów*
Odbicie/ Ekspansja/ Kontrakcja/ kurczenie	*Oblicz x_g – ważony środek ciężkości dla wszystkich punktów oprócz najgorszego punktu w aktualnym sympleksie x_{n+1}, oblicz x_r - odbity punkt x_{n+1}, oraz wartość f;* *zależnie od wartości f w x_r oblicz rozszerzony punkt x_e poprzez rozciągnięcie przedziału $[x_{n+1}, x_r]$ w kierunku x_r,* *zależnie od wartości f w x_e oblicz punkt x_c z przedziału $[x_{n+1}, x_r]$, zbuduj nowy sympleks poprzez zastąpienie x_{n+1} aktualnym najlepszym punktem;* *wykonaj kurczenie się sympleksu*	*Bieżący zbiór E_m jest miejscowo triangulowany, w szczególności, triangulacja tworzy przylegający sympleks w kierunku potencjalnego odbicia lustrzanego.* *Operacja $\oplus_f$ na sąsiadujących sympleksach począwszy od sympleksu z jak dotąd najwyższą wartością zastępuje i uogólnia rozszerzenie. Kontrakcja zostaje zastąpiona przez znalezienie drobniejszej partycji E_m na sympleksy, wynikającego z triangulacji.* *Wartości f są zdefiniowane tylko dla E, dlatego podczas wyszukiwania nie mogą być zastosowane żadne dodatkowe punkty.*
Kurczenie	*Rozmiar bieżącego sympleksu jest zredukowany przez kurczenie się w kierunku najlepszych jak dotąd punktów*	*Triangulacje początkowego zbioru E_1 i następujących ewoluujących dyskretnych zbiorów E_m dostarczają drobniejszej partycji przestrzeni rozwiązań* *Gdy minimum zostanie znalezione i Algorytm zatrzyma się na x_k, można wykonać drobniejszą dyskretyzację czasu wokół x_k. Następnie procedura wyszukiwawcza (Alg. 3 lub 4 z Rozdz. 6 rozprawy) rozpoczyna się w nowym zbiorze G, składającym się z sąsiadów x_k*
Kryteria stopu	*Po zastosowaniu wszystkich kroków nie ma poprawy względem minimalnych wartości znalezionych pierwotnie, lub rozmiar skurczonego sympleksu jest mniejszy niż zalecana stała*	*Zbiór (dyskretnych) punktów ekstremalnych dla E został osiągnięty, lub nie ma poprawy w lokalnej rodzinie sympleksów*

Hybrydowy algorytm Neldera Meada

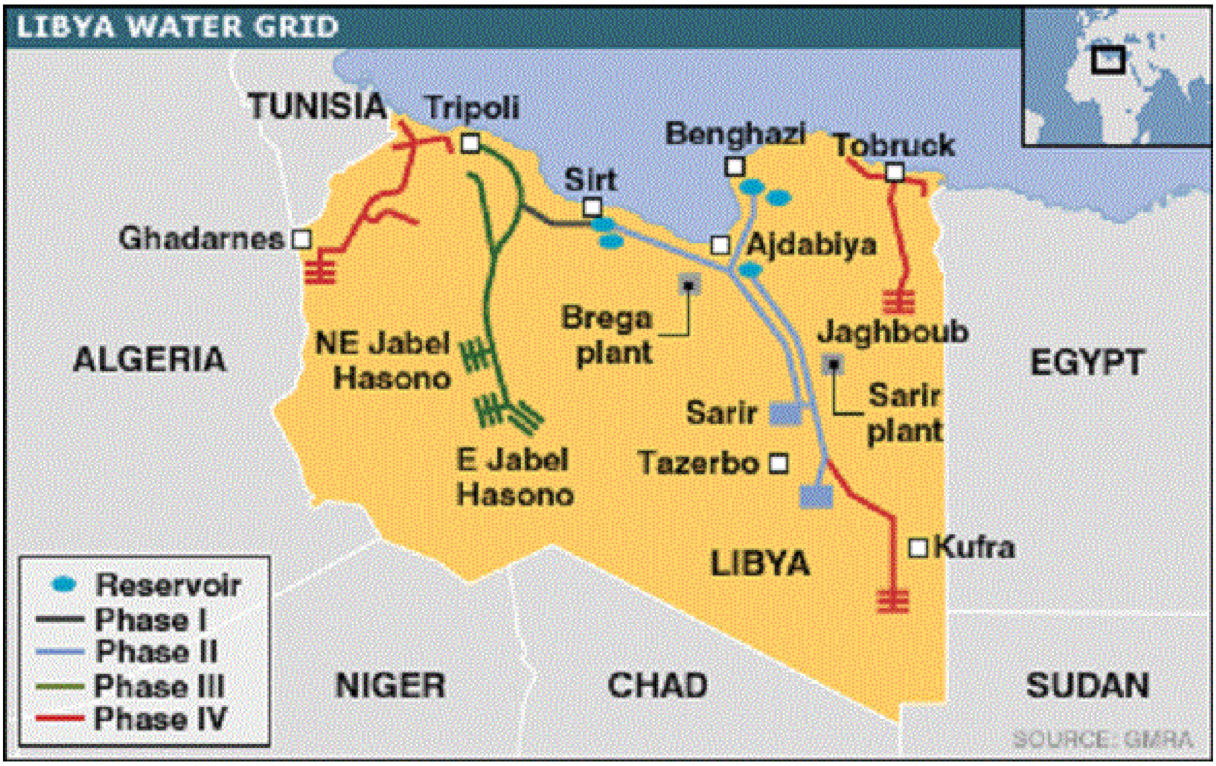
Eksperymenty obliczeniowe wykazały, że w pewnych sytuacjach lepsze własności numeryczne od algorytmu dyskretnego posiada algorytm hybrydowy, w którym po wykonaniu pewnej ilości kroków ciągłego algorytmu Neldera-Meada następuje przełączenie do wersji dyskretnej.

Sytuacja taka ma miejsce w przypadku, gdy punkty startowe są relatywnie oddalone (względem rozmiaru przestrzeni decyzyjnej) i Algorytm 6.3 mógłby potrzebować bardzo dużo czasu, by pokazać swoją efektywność na podstawowych sympleksach. Idea algorytmu hybrydowego polega na zastosowaniu na starcie klasycznego algorytmu, następnie – gdy sympleksy osiągną zalecany rozmiar – przełączeniu się na Algorytm 6.3.

Przykład zastosowania – optymalizacja systemu zaopatrzenia w wodę w Libii (MMR - Man-Made River)

Dane dotyczące Libijskiego Systemu Zaopatrzenia w Wodę Pitną przedstawione w tym rozdziale oparte są na [21]. W 1953 poszukiwanie nowych pól naftowych na pustyniach południowej Libii doprowadziło do odkrycia nie tylko znaczących zasobów nafty, lecz również dużych ilości słodkiej wody w zbiornikach artezyjskich.

***Rys.3**. Libijski system zaopatrzenia w wodę pitną (MMR) z zaznaczeniem faz rozbudowy*



Istnieją cztery główne baseny artezyjskie. Basen Kufra, leżący na południowym wschodzie, blisko granicy z Egiptem, o powierzchni 350,000km², tworzący wodonośną powierzchnię o ponad 2,000m głębokości, z szacowaną pojemnością 20,000km3 w części Libijskiej. Szacuje się, że głęboka na 600m wodonośna powierzchnia w basenie Sirt zawiera ponad 10,000km3 wody, podczas gdy 450,000km2 basen Murzuk, na południu Jabal Fezzan, ma zawierać 4,800km3. Dalsze zasoby wody znajdują się w basenach Hamadah i Jufrah, które ciągną się od Qargaf Arch i Jabal Sawda do wybrzeża. Projekt MMR ma na celu transport wody na północny pas wybrzeża, aby dostarczyć ją dla 5,6 milionów mieszkańców państwa oraz do irygacji. Zapoczątkowane w późnych latach sześćdziesiątych, wstępne badania wykonalności projektu były prowadzone w 1974, a prace rozpoczęto dziesięć lat później. Projekt, który zgodnie z przewidywaniami ma trwać jeszcze przez 25 lat, został zaprojektowany w pięciu fazach. Każda z faz jest wyraźnie odrębna, lecz mogą one zostać połączone w celu stworzenia zintegrowanego systemu.

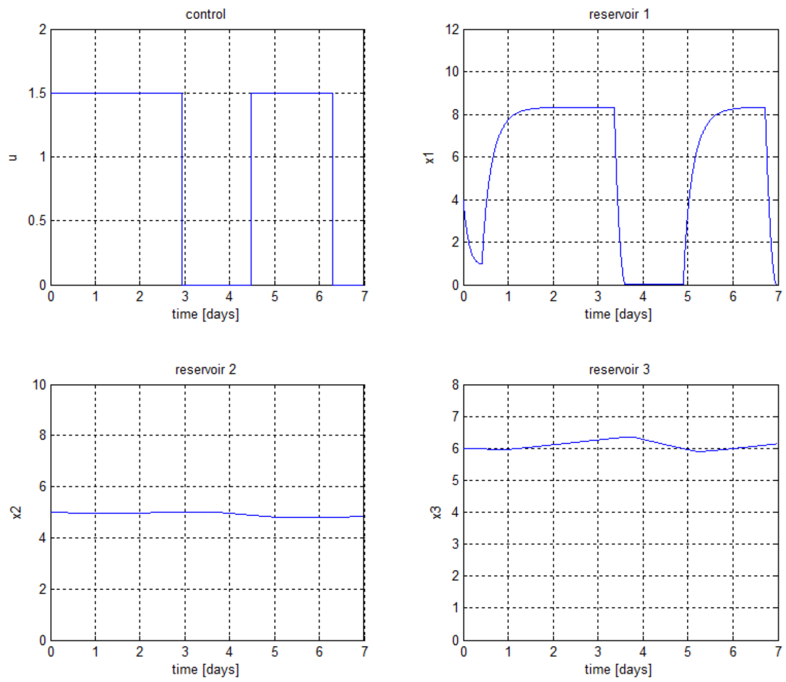
Podczas modelowania systemu zaopatrzenia w wodę pitną tylko dwa zbiorniki (tylko wschodnia część projektu) były brane pod uwagę w obliczeniach i zakładany był pierwiastek kwadratowy z faktycznego przepływu wody. Co więcej, poczyniono kilka poniżej wymienionych założeń dla systemu:

- jedna pompa wody przenosząca wodę ze studni do systemu dostarczania wody,
- dodatkowy pośredniczący zbiornik między źródłem wody i głównymi wodnymi zbiornikami,
- stałe opóźnienia transportu w oparciu o średni przepływ wody między lokalizacjami,
- prostokątny model kształtu zbiornika.

W związku z trudnościami z uzyskaniem aktualnych wartości parametrów zbiorników, przyjęto założenia dotyczące przepływów pomiędzy zbiornikami, w tym wartości opóźnień, umożliwiające przybliżoną identyfikację systemu w celu jego optymalizacji. Poniżej podajemy przykładowe trajektorie przepływu i poziomu wody w zbiornikach dla wartości

$C_1 = 0.52$, $C_2 = 0.7$, $C = 0.45$, $\tau_1 = 10h$, $\tau_2 = 4h$, $\tau_3 = 6h$ *(h-godzina)*

***Rys.4**. Przykładowe trajektorie przepływu i sterowania w okresie 1 tygodnia dla zestawu parametrów (A)*



Wnioski końcowe

W Rozdziale 1 określiliśmy główny cel niniejszej rozprawy jako „dostarczenie nowych obliczeniowych metod rozwiązywania pewnej klasy zdyskretyzowanych wielokryterialnych problemów sterowania optymalnego. Cel został wypełniony dzięki nowemu nieróżniczkowalnemu algorytmowi optymalizacji, bazującemu na klasycznym schemacie Neldera-Meada. Tym samym trzy tezy sformułowane w Rozdziale 1 zostały udowodnione poprzez przedstawienie matematycznych i obliczeniowych podstaw nowych algorytmów w Rozdziałach 2-5. W Rozdziale 6 podano szczegółowy opis nowych algorytmów optymalizacji dyskretnej oraz hybrydowej (dyskretno-ciągłej) w oparciu o schemat Neldera-Meada, a w Rozdziale 7 zastosowano je do rozwiązywania wielokryterialnych problemów sterowania optymalnego związanych z dostarczaniem wody pitnej w Libii.

Nowe operacje w procedurach typu Neldera-Meada zostały opisane jako działania algebraiczne, co upraszcza opis algorytmu dzięki możliwości jednolitego potraktowania operacji odbicia, ekspansji, kontrakcji i kurczenia. W obu wersjach algorytmów typu Neldera-Meada, klasycznej oraz rozszerzonej, kluczową rolę odgrywa zbiór punktów startowych E_0.

Eksperymenty numeryczne ze zmodyfikowanymi dyskretnymi i hybrydowymi algorytmami w Rozdziałach 6 i 7 udowodniły ich zalety. Porównaliśmy różne algorytmy typu Neldera-Meada startujące od tego samego zbioru punktów, lecz przebiegające jako osobne procesy z wymianą informacji, oraz procesy oparte na kooperacji związanej ze strukturą kompleksu symplicjalnego.

Zastosowanie ogólnych idei algorytmu Neldera-Meada w optymalizacji kombinatorycznej okazało się możliwe w sytuacji, gdy funkcja celu wykazuje pewną regularność, tzn. istnieje struktura w zbiorze E, taka że punkty sąsiednie generowane przez tę strukturę mają podobne wartości, w przeciwieństwie do dowolnych punktów zbioru E. Zauważmy, że ta własność może korespondować z istnieniem procedur znajdowania lokalnych triangulacji, które zostały opisane w Podrozdz. 6.3. W przypadku ciągłej funkcji celu analogicznym założeniem jest istnienie stałej Lipschitza, zatem racjonalne uzasadnienie użycia ciągłej i dyskretnej wersji algorytmu typu Neldera-Meada ma tę samą ogólną, heurystyczną naturę.

Podsumowując, podejście zaprezentowane w niniejszej rozprawie pozwoliło rozwiązać wielokryterialne problemy optymalnego sterowania dla systemów dostarczania wody w sposób efektywny. Dyskretne i hybrydowe procedury Neldera-Meada okazały się uniwersalnymi narzędziami dla globalnych nieróżniczkowalnych problemów optymalizacji.

BIBLIOGRAFIA

[1] Armann R. (1989). Solving Multiobjective Programming Problems by Discrete Representation. Optimization, 20, no. 4, 483-492.

[2] Barton R.R., Ivey Jr. J. S. (1996). Nelder-Mead Simplex Modifications for Simulation Optimization. Management science, Ingenta, vol. 42, no. 7, 954.

[3] Chelouah R., Siarry P. (2003). Genetic and Nelder-Mead algorithms hybridized for a more accurate global optimization of continuous multiminima functions European Journal of Operational Research, Ingenta, vol. 148, no. 2, pp. 335-348.

[4] Chelouah R., Siarry P. (2003). A hybrid method combining continuous tabu search and Nelder–Mead simplex algorithms for the global optimization of multiminima functions. European J. Oper. Res., 161, 636–654.

[5] Robic T., Filipic B. (2005). DEMO: Differential Evolution for Multiobjective Optimization. In: *C.* A. Coello Coello et al. (Eds.): EMO 2005, LNCS 3410, pp. 520–533, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005. (http://dis.ijs.si/tea/Publications/Robic05Demo.pdf*)*

[6] Kaliszewski I. (2006). Wielokryterialne podejmowanie decyzji, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
[7] Kelley C.T. (2000). Detection and Remediation of Stagnation in the Nelder-Mead Algorithm Using a Sufficient Decrease Condition. Siam Journal of Optimization, Ingenta, vol. 10, no. 1, 43.
[8] Klamka J. (2002). Controlalbility, AMCS,
[9] Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.H. (1999). Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions SIAM J. Optim. 9, no. 1, 112-147
[10] Li W., Tan Q., Janocha H. (1995). Optimizing fuzzy logic controller using Nelder and Mead's simplex algorithm. Control Theory Appl. 12 MathSciNet, no. 5, 616-622.
[11] Luersen M.A., Le Riche R. (2004). Globalized Nelder–Mead method for engineering optimization, Computers and Structures, 82, 2251–2260.
[12] Luersen M.A., Le Riche H., Guyon F. (2004). A constrained, globalized, and bounded Nelder–Mead method for engineering optimization, Struct. Multidisc. Optim., 27, 43–54.
[13] Martinez A., Agelet F.A., Alvarez-Vazquez L.J., Hernando J.M. (2000). Mosteiro, D. Optimal Transmitter Location in an Indoor Wireless System by Nelder-Mead Method Microwave and Optical Technology Letters, Ingenta, vol. 27, no. 2, pp. 146-148.
[14] McKinnon K.I.M. (1999). Convergence of the Nelder-Mead Simplex Method to a Nonstationary Point. SIAM Journal on Optimization, Ingenta, vol. 9, no. 1, pp. 148-158
[15] Nelder, J.A.,, Mead R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization , The Computer Journal, 7, 308–313.
[16] Price C.J., Coope I.D., Byatt D. (2002). A Convergent Variant of the Nelder-Mead Algorithm. Journal of Optimization Theory and Applications, Ingenta, vol. 113, no. 1, 5-19.
[17] Skulimowski A.M.J. (1996). Decision Support Systems Based on Reference Sets. AGH Scientific Publishers, Monographs, No.40, p.165.
[18] Skulimowski A.M.J. (2012), Selected problems and applications of multicriteria optimization Scientific Publishers of the AGH University of Science and Technology (forthcoming).
[19] Skulimowski A.M.J., Schmid B.F. (1992). Redundancy-Free Description of Partitioned Complex Systems. Mathl Comput. Modelling, 16, no. 10, 71-92.
[20] Subrahmanyam M.B. (1989). An extension of the Nelder-Mead algorithm to constrained problems, J. Optimiz. Theory and Appl., 62, 311-319
[21] http://www.water-technology.net/projects/gmr/

Omer S. M. Jomah:
"Global Optimization Methods for Solving Multicriteria Optimal Control Problems", AGH University of Science and Technology,

Summary. The main goal of this dissertation has been formulated as to prove that the common Nelder-Mead algorithm can be generalized using the simplicial complex theory to a global optimization process that imitates an evolutionary procedure, has strict mathematical properties, and yields the global minimum. Then we have used the idea derived from the Nelder-Mead algorithm to define a procedure to solving multicriteria optimization problems and capable of finding all local Pareto minima. The Chs. 1,2,3,4 have an introductory character. In Ch.3 we have proposed a method to find the optimal parameters of the nelder-mead algorithm (expansion, contraction, reflexion, shrinking) using a set of test functions. A survey of multicriteria optimization and multicriteria optimal control problems has been presented in Ch. 5. In Ch.6 we have proved that multicriteria optimal control problems governed by linear ordinary differential equations can be solved using a sequential extension of the global multicriteria Nelder-Mead algorithm, applied to the original optimal control problem after a discretization of control switching times. We have elaborated new discrete and hybrid discrete-continuous optimization methods based on the Nelder-Mead scheme, and applied them in Ch.7 to solving a multicriteria optimal control problem related to water supply in Libya. Final conclusions are presented in Ch.8.